2. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jordannormalform J der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4},\ B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4},$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4},\ K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Geben Sie für A auch ein X an mit $X^{-1}AX = J$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus dem Beweis von Satz 1.14 aus der Vorlesung: Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ mit $\chi_\alpha(x) = \mu_\alpha(x)$, dann gibt es ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $\mu_{\alpha,V}(x) = \mu_\alpha(x)$.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$. Zeigen Sie

1. $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ist der Kern der linearen Abbildung $\mathrm{End}(\mathfrak{V}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{V}) : \gamma \mapsto \gamma\circ\alpha - \alpha\circ\gamma$.
2. $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ist ein Teilring von $\mathrm{End}(\mathfrak{V})$, d. h. ist unter Multiplikation abgeschloßen, und $\alpha \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$
3. Sei $\mu_\alpha(x) = p_1 \cdot p_2$ mit normierten Polynomen p_i, und $\mathrm{ggT}(p_1, p_2) = 1$. Setze $\mathfrak{V}_i :=$ $\mathrm{Kern}\, p_i(\alpha)$. Dann ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha) \cong C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V}_1)}(\alpha_{|\mathfrak{V}_1}) \oplus C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V}_2)}(\alpha_{|\mathfrak{V}_2})$
4. Ist $\mu_\alpha(x) = \chi_\alpha(x)$, so ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha) \cong K[x]/\mu_\alpha(x)$.
5. Wann ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ein Körper?

Aufabe 4. Bestimmen Sie Vertreter X_i der Ähnlichkeitsklassen in $\mathbb{F}_2^{4\times 4}$. Geben Sie $C_{\mathbb{F}_2^{4\times 4}}(X_i)$ an für jedes X_i. Hinweis: es gibt in $\mathbb{F}_2[x]$ genau 1, 2, bzw. 3 irreduzibele, normierte Polynome vom Grad 2, 3, bzw. 4.

Abgabe: Montag, 07.05.2001, in der Übung