3. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1.

1. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + \mu y' + \frac{c}{m} y = 0$. Welche Lösungen hat diese Differentialgleichung in Abhängigkeit von den Parametern μ und $\frac{c}{m}$? Welcher Fall ist besonders? Wie zeichnet er sich algebraisch aus?

2. Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(1)} - y = 0$.

3. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

   mit $f_i \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

mit $f_i \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{C})$. Zeige: Das System ist äquivalent zu r gewöhnlichen Differentialgleichungen für nur eine unabhängige Funktion, wobei r die Anzahl der Jordanblöcke von A ist. Was ist die Ordnung dieser r Differentialgleichungen? Zeige: Ist $\mu_{\overline{A}} = \chi_{\overline{A}}$, so ist das System äquivalent zu einer Gleichung.

Aufgabe 3. Sei $S_n := \{\nu \in \underline{n}^{\underline{n}} | \nu \text{ bijektiv } \}$. S_n ist nach Vorlesung eine Gruppe. Zeige, daß die folgenden Abbildungen Operationen der S_n induzieren, und bestimme die Bahnen und den Stabilisator eines Elementes jeder Bahn.

1. $S_n \times \underline{n} \to \underline{n} : (\nu, i) \mapsto \nu(i)$.

2. $S_n \times \mathrm{Pot}(\underline{n}) \to \mathrm{Pot}(\underline{n}) : (\nu, X) \mapsto \nu(X)$.

3. Sei $\mathrm{Part}(\underline{n}) := \{\{X_1, \ldots, X_r\} : X_i \cap X_j = \emptyset$ für $X_i \neq X_j$, und $\cup_{i \in \underline{r}} X_i = \underline{n}\} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\underline{n}))$ die Menge der Partitionen von $\underline{n}$. Die Operation sei gegeben durch $S_n \times \mathrm{Part}(\underline{n}) \to \mathrm{Part}(\underline{n}) : (\nu, \{X_1, \ldots, X_r\}) \mapsto \{\nu(X_1), \ldots, \nu(X_r)\}$.

Aufabe 4. (Zusammenhang Differenzengleichungen und Differentialgleichungen) Sei K ein algebraisch abgeschloßener Körper mit $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathfrak{V} = K[[x]]$ der Ring der Potenzreihen über K. Definiere die zwei linearen Abbildungen $\alpha : K[[x]] \to K[[x]] : \sum a_i x^i \to \sum a_{i+1} x^i$ (Schiebeoperator) und $\partial : K[[x]] \to K[[x]] : \sum a_i x^i \to \sum a_{i+1}(i+1)x^i$. Zeige: Es gibt einen Isomorphismus $\tau : K[[x]] \to K[[x]]$ mit $\tau \alpha \tau^{-1} = \partial$. Hinweis: Betrachten Sie die Basen $B := (1, x, x^2, \ldots)$ und $C = (0!, 1! \cdot x, 2! \cdot x^2, \ldots)$ von $K[[x]]$.

Abgabe: Montag, 14.05.2001, in der Übung