4. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basen C und D mit

$$^{C}\mathrm{id}^{D} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}, \quad ^{C}\mathrm{id}^{D} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}.$$

Bestimme jeweils eine Basis B von $\mathfrak{V}$ und eine Permutation σ mit $F(B) = F(C) = F(D \circ \sigma)$.

Aufgabe 2

1. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeige: $\mathrm{O}(\mathfrak{V}, \Phi)$ operiert transitiv auf der Menge der Fahnen von $\mathfrak{V}$. Ist F Fahne in $\mathfrak{V}$, so gilt $|\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(\mathfrak{V},\Phi)}(F)| = 2^n$.

2. Sei K algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über K. Zeige: Für jedes $g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ gibt es ein Fahne F mit $gF = F$. Warum braucht man die Voraussetzung an K?

Aufgabe 3 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeige: $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ operiert auf $\mathrm{Sesq}_+(\mathfrak{V})$ durch $(g, \Phi) \mapsto \Phi_g$ **$\mathbb{R}$-linear**, wobei $\Phi_g(V, W) := \Phi(gV, gW)$. Bestimme eine trennende Invariante für diese Operation.

Aufgabe 4 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, und setze $U_k(\mathfrak{V}) := \{\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V} | \mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} = k\}$.

1. Zeige : $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ operiert transitiv auf $U_k(\mathfrak{V})$ durch $(g, \mathfrak{U}) \mapsto g(\mathfrak{U})$.

2. Somit operiert $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ auch auf $U_k(\mathfrak{V}) \times U_k(\mathfrak{V})$. Zeige, daß $d : U_k(\mathfrak{V}) \times U_k(\mathfrak{V}) \to \mathbb{N} \cup \{0\} : (\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) \mapsto k - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W})$ trennende Invariante für diese Operation ist.

3. Sei $\mathfrak{U} \in U_k(\mathfrak{V})$, und setze $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{V})}(\mathfrak{U})$. Zeige: $d : U_k(\mathfrak{V}) \to \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathfrak{W} \mapsto k - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W})$ ist trennende Invariante für die Operation von H auf $U_k(\mathfrak{V})$.

4. Zeige: d aus 2. erfüllt die Dreiecksungleichung, d. h. $d(\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) \leq d(\mathfrak{U}, \mathcal{X}) + d(\mathcal{X}, \mathfrak{W})$ für alle $\mathcal{X}$ in $U_k(\mathfrak{V})$. Hinweis: Zeige zunächst, daß dies äquivalent ist zu $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} \cap \mathcal{X} + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{W} \cap \mathcal{X} \leq k + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W}$.

Abgabe: Montag, 21.05.2001, in der Übung