5. Übung zur Computeralgebra I

Prof. Dr. Plesken **(SS 2007)**

Aufgabe 1. (Abzählring)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.24 zeige man, daß für jedes $1 \leq r \leq s$ die Spalten von $A^\wedge$ (mit $A^\wedge_{i,j} = \alpha^\wedge_{ij}$) Eigenvektoren der Matrix $M^{(r)}$ sind, wobei $M^{(r)}$ durch die Multiplikationskoeffizienten $M^{(r)}_{j,k} = \mu^k_{r,j}$ definiert ist. Was sind die Eigenwerte?

Aufgabe 2. (Burnsidering)
Es sei $G = S_5$, $H \leq G$, $K \leq G$ mit $H \cong D_{10}$ und $K \cong C_3$.

a) Wieviele Paare (U_1, U_2) von Untergruppen von G mit $U_1 \cong C_2$, $U_2 \cong C_5$ gibt es, die zusammen H erzeugen?

b) Wieviele Paare (U_1, U_2) von Untergruppen von G mit $U_1 \cong A_4$, $U_2 \cong S_4$ gibt es, die sich genau in K schneiden?

Aufgabe 3. (Abzählring)
Es sei R der $\mathbb{Z}[x]$-Teilmodul von $\bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}[x]$, der von den Zeilen der folgenden Matrix B erzeugt wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^5+x^4+x^3-x^2-x-1 & x^4+x^3-x^2-x-1 & x^3-x^2-x-1 & -x^2-x-1 \\ x^8+x^7-2x^5-2x^4+x^2+x & x^6-x^5-2x^4+x^2+x & -x^4+x^2+x & x^3+x^2+x \\ x^9-x^8-x^7+x^5+x^4-x^3 & -x^6+x^5+x^4-x^3 & x^4-x^3 & -x^3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß R mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring ist und bestimme die Multiplikationskoeffizienten $\mu^k_{i,j} \in \mathbb{Z}[x]$ bzgl. der $\mathbb{Z}[x]$-Basis von R, die durch die Zeilen von B gegeben ist.

Für jede Primzahlpotenz q gibt es genau $\mu^k_{i,j}(q)$ Paare von Matrizen (A, B) mit $A, B \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{3\times 3}$, $\mathrm{Rang}(A) = i$, $\mathrm{Rang}(B) = j$, so daß $A + B = C$ für eine feste Matrix $C \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{3\times 3}$ vom Rang k ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es also, eine beliebige 3×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ vom Rang 2 als Summe von einer Matrix vom Rang 2 und einer Matrix vom Rang 3 zu schreiben?

Abgabe: Mittwoch, 09.05.2007, in der Übung.