```
> restart;
> with(Involutive):
```

Wir wollen den Janetgraph, eine Abschätzung für die projektive Dimension und den Janetgraph im folgenden Beispiel ausrechnen:

```
> v:=[x,y,z];
```

$$v := [x, y, z]$$

```
> L:=[x^2+y,z^3+1,x*y];
```

$$L := [x^2 + y, z^3 + 1, x\,y]$$

```
> J:=InvolutiveBasis(L,v);
```

$$J := [y^2, x\,y, x^2 + y, z^3 + 1, y + z^3\,y, x + z^3\,x]$$

```
> PolHilbertSeries(t);
```

$$1 + 3\,t + 3\,t^2 + 2\,t^3$$

```
> PolTabVar();
```

$$[y^2, [*, y, z], y^2]$$
$$[x\,y, [*, y, z], x\,y]$$
$$[x^2 + y, [x, y, z], x^2]$$
$$[z^3 + 1, [*, *, z], z^3]$$
$$[y + z^3\,y, [*, *, z], z^3\,y]$$
$$[x + z^3\,x, [*, *, z], z^3\,x]$$

Die maximale Anzahl von Sternen in einer Zeile ist 2, also ist die projektive Dimension des durch J dargestellten Restklassenmoduls kleiner oder gleich 3. (Man kann mit Hilfe unserer früheren Sätze zeigen, daß sie wirklich gleich 3 ist.) Der Janegraph läßt sich nur teilweise unmittelbar ablesen: Die Ecken (entsprechend den Elementen von J) und die Kanten, die von einem Element von J ausgehen, gemäß den Sternen in der Zeile des Elementes von J. (Dies legt die Ränge von P_0 und P als freie Moduln in der unten angegebenen Auflösung fest.) Nicht sofort ablesbar (aber leicht bestimmbar) sind die Eckpunkte an den Enden der Kanten. Hier ist eine freie Auflösung:

```
> p:=PolResolution(L,v);
```

$p :=$

$$\left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & x & 0 & 1 & -y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & z^3+1 \\ x & 1 & 0 & -y & 0 & 0 & z^3+1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -z^3-1 & 0 & 0 & 0 & y \\ -z^3-1 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -z^3-1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -z^3-1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & -1 \\ 1 & x & -y & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ x\,y \\ x^2+y \\ z^3+1 \\ y+z^3\,y \\ x+z^3\,x \end{bmatrix}\right]$$

Wir wollen den Janetgraphen vollständig bestimmen, indem wir nur mit den Führermonomen operieren:

```
> l:=map(a->LeadingMonomial(a,v),J);
```

$$l := [y^2, x\,y, x^2, z^3, z^3\,y, z^3\,x]$$

```
> j:=PolResolution(l,v);
```

$$j := \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & x & 0 & 1 & -y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & z^3 \\ x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & z^3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -z^3 & 0 & 0 & 0 & y \\ -z^3 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -z^3 & 0 & 0 & x \\ 0 & -z^3 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & -1 \\ 0 & x & -y & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ x\,y \\ x^2 \\ z^3 \\ z^3\,y \\ z^3\,x \end{bmatrix}\right]$$

Aus der rechten Matrix haben wir jetzt die Ecken des Janetgraphen, aus den Zeilen der sich nach links anschließenden Matrix die vollständige Information über die Kanten.
Es gibt auch einen direkten Befehl, der den Janet-Graphen ausgibt:

```
> AssertInvBasis(J,v);
```

$$[y^2, x\,y, x^2+y, z^3+1, y+z^3\,y, x+z^3\,x]$$

```
> JanetGraph(v);
```

$$\left[[y^2, x, x\,y], [x\,y, x, x^2], [z^3, x, z^3\,x], [z^3, y, z^3\,y], [z^3\,y, x, x\,y], [z^3\,y, y, y^2], [z^3\,x, x, x^2], [z^3\,x, y, x\,y] \right]$$

Also die Ränge der Moduln in der freien Auflösung sind: 6 für die 6 Ecken, 8 für die 8 Kanten, 3 fü
3 Paare von Kanten, die von einer Ecke ausgehen.