

3. Gruppenübung zur Differentialalgebra II

Prof. Dr. Plesken

(SS 06/07)

Aufgabe 1. (Tensorprodukt) (4 Punkte)

Zeige:

1. Für $M_1 \in \mathcal{M}_A, M_2 \in {}_A\mathcal{M}_B, M_3 \in {}_B\mathcal{M}$ ist

$$(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_B M_3 \cong M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_B M_3).$$

2. Für $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_R$ und $N \in {}_R\mathcal{M}$ ist

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \cong (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N).$$

3. Sei R ein Ring, I ein Rechtsideal und J ein Linksideal in R . Dann gilt $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J)$.

Aufgabe 2. (Tensorprodukt) (4 Punkte)

Sei (R, \mathfrak{m}) ein kommutativer NOETHERscher lokaler Integritätsbereich, mit Restklassenkörper k und Quotientenkörper K . Ein endlicher erzeugter R -Modul ist frei vom Rang r genau dann, wenn $\dim_k M \otimes_R k = \dim_K M \otimes_R K = r$.

Hinweis: NAKAYAMA's Lemma.

Aufgabe 3. (Torsionsprodukt tor) (4 Punkte)

1. Ist R ein Hauptidealbereich, so ist $\text{tor}_R^i(M, N) = 0$ für $i \geq 2$ und alle R -Moduln M, N , mit M endlich erzeugt. (Der Satz gilt auch ohne die Forderung: M endlich erzeugt).
2. Sei R ein Hauptidealbereich, I, J zwei Ideale in R . Bestimme $\text{tor}_R^1(R/I, R/J)$.
3. Sei R ein Ring. Ein projektiver R -Modul ist flach.

Aufgabe 4. (tor als Funktor) (4 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ und $M := \text{coker}(R^{1 \times 2} \xrightarrow{A} R^{1 \times 3})$ für

$$A := \begin{pmatrix} x^2y & x^3 - xz & x^3 \\ (1-x)(x-y) & (1-x)(y-z) & (1-x)(z-x) \end{pmatrix} \in R^{2 \times 3}.$$

1. Berechne die Sequenz $0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0$, wobei $t(M)$ der Torsionsteilmodul von M ist.
2. Berechne den Funktor $- \otimes_R t(M) = \text{tor}_0^R(-, t(M))$ bzw. $\text{tor}_1^R(-, t(M))$ angewandt auf die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow t(M) \rightarrow M \rightarrow M/t(M) \rightarrow 0$.
3. Sind die entstehenden Sequenzen wieder exakt?

Hinweis zu 1: Betrachte eine Parametrisierung von M .

Abgabe: Donnerstag, den 03.05.07, in der Übungsgruppe.