5. Gruppenübung zur Differentialalgebra II

Prof. Dr. Plesken **(SS 06/07)**

Aufgabe 1. (SCHANUELs Lemma) (4 Punkte)
Vervollständige den Beweis vom SCHANUELs Lemma und Satz 2.44.

Aufgabe 2. (Stabilfrei) (4 Punkte) Sei R ein Ring. Ein endlich erzeugter Modul heißt M *stabil frei*, falls er direkter Summand eines freien Moduls ist mit einem *freien Komplement*.

1. Sei $R = \mathbb{R}[x, y, z]/\langle x^2 + y^2 + z^2 - 1\rangle$. Zeige $T := \operatorname{coker}(R^{1\times 1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}} R^{1\times 3})$ ist ein stabil freier R-Modul. Benutze den Igel-Satz aus der Analysis um zu zeigen, daß M nicht frei ist.

2. Zeige dagegen, daß $\mathbb{C} \otimes T$ als $\mathbb{C} \otimes R$-Modul frei ist.

3. Zeige, daß das Linksideal $\langle \partial^2, x\partial - 1\rangle \trianglelefteq W_1(\mathbb{Q})$ der Weyl-Algebra $W_1(\mathbb{Q})$ stabil frei ist, aber nicht frei.

4. Zeige für $R = W_1(\mathbb{Q})$, daß der R-Modul

$$M := \operatorname{coker}\left(R^{1\times 2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & 1 - x\partial \\ 2 + x\partial & -\partial^2 \end{pmatrix}} R^{1\times 2} \right)$$

   stabil frei ist. Ist M frei?

Hinweis: Suche Rechtsinverse der Präsentationsmatrizen nach eventueller Verkürzung einer freien Auflösung (vgl. Übung 4, Aufgabe 4).

Aufgabe 3. (Kommutativität und Split) (4 Punkte)

1. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Mit $\operatorname{row}(A)$ bezeichne die $1 \times mn$-Matrix, die daraus entsteht, daß man alle Zeilen von A neben einander schreibt. Sei nun R ein kommutativer Ring und A und B komponierbare Matrizen über R. Finde eine Matrix C mit $\operatorname{row}(A)C = \operatorname{row}(BA)$.

2. Sei nun R ein Ring mit einem Janet-Basis Begriff. Benutze die Idee aus dem ersten Teil der Aufgabe um einen Algorithmus zu schreiben, der entscheidet, ob ein R-Modulepimorphismus $p : M \to N$ zwischen zwei endlich präsentierten Moduln M und N splittet oder nicht, d.h. ob es ein R-Modulhomomorphismsus gibt, mit $sp = \mathrm{Id}_N$ (beachte: wir wenden Homomorphismen von rechts an, d.h. $sp := p \circ s$).

Aufgabe 4. (Projektivität) (4 Punkte)
Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Zeige: Das Ideal $J := \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$ ist als R-Modul projektiv aber nicht frei.

Abgabe: Donnerstag, den 24.05.07, in der Übungsgruppe.