

9. Gruppenübung zur Differentialalgebra II

Prof. Dr. Plesken

(SS 06/07)

Aufgabe 1. (H^0 und H_0) (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und A ein G -Modul. Zeige:

1. $H_0(G, A) = A / \{a(g-1) \mid a \in A, g \in G\}$.
2. $H^0(G, A) = \{a \in A \mid ga = a \text{ für alle } g \in G\}$.

Aufgabe 2. (Fundamentalgruppe und erste Homologie) (4 Punkte)

Zeige $H_1(G, A) \cong G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} A$ und $H^1(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/G', A)$, wobei A ein G -Modul mit trivialer Operation ist.

Aufgabe 3. (Homologie und Kohomologie) (4 Punkte)

Bestimme möglichst viele der Homologiegruppen $H_{\bullet}(G, M)$ bzw. Kohomologiegruppen $H^{\bullet}(G, M)$ für $G = C_n$ bzw. $G = \mathbb{Z}$ mit Werten in den Moduln $M = \mathbb{Z}$ bzw. $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit trivialer G -Operation.

Aufgabe 4. (Kohomologie) (4 Punkte)

Die Gruppe $D_8 := \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^4 \rangle$ operiert auf $L := \mathbb{Z}^{2 \times 1}$ vermöge $a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme $H^i(D_8, L)$ für $i = 1, 2$.

Hinweis: Für $i = 2$ betrachte die Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Q}L \rightarrow \mathbb{Q}L/L \rightarrow 0$, wobei $\mathbb{Q}L := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L = \mathbb{Q}^{2 \times 1}$.

Abgabe: Donnerstag, den 28.06.07, in der Übungsgruppe.