Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 3

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 19 (ab 08. Mai) testiert.

Aufgaben: 7

```
> restart;
```

Ein wichtiges Konzept in der Analysis sind **Grenzwerte** von Folgen. Diese können in Maple mit dem Befehl `limit` bestimmt werden.

ÜBUNG [01]:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Maple: 1.) $\lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{1+k^2}$, 2.) $\lim_{k \to \infty} \frac{k^5}{2^k}$, 3.) $\lim_{k \to \infty} \frac{x^k}{k!}$ mit $x \in \mathbb{R}$, 4.) $\lim_{k \to \infty} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k$, 4.) $\lim_{k \to \infty} \left(1+\frac{1}{2\,k}\right)^k$, 5.) $\lim_{k \to \infty} \frac{k!\,\mathrm{e}^k}{k^k\sqrt{k}}$, 6.) $\lim_{n \to \infty} \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)\right\}$. Lassen Sie sich für diesen Wert mit `evalf` eine Näherung ausgeben.

Während die ersten vier Grenzwerte mit elementaren Methoden auch ohne Maple berechnet werden können, benötigt man für den fünften die Stirling-Formel und der sechste ist eine mögliche Definition der Euler-Mascheroni-Konstanten γ.

Manchmal ist etwas mehr Geschick nötig, um mit Maple Grenzwerte zu bestimmen.

Für $\lim_{k \to \infty} \left\{(-1)^k - (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}$, $\lim_{k \to \infty} \left\{(-1)^k - \left(-1+\frac{1}{k^2}\right)^k\right\}$ und $\lim_{k \to \infty} \sin(k\pi)$

funktioniert der Befehl `limit` alleine nicht:

```
> limit((-1)^k-(-1)^k*(1+1/k),k=infinity);
> limit((-1)^k-(-1+1/(k^2))^k,k=infinity);
> limit(sin(k*Pi),k=infinity);
```

Obwohl man die Grenzwerte dieser Folgen mit elementaren Analysiskenntnissen berechnen kann, hat Maple hier Schwierigkeiten. Das liegt daran, dass Maple offensichtlich keine Termumformungen vornimmt und den Folgenindex k nicht als ganzzahlig annimmt. Schauen Sie sich die Hilfeseiten der Befehle `simplify`, assume und `factor` an:

```
> ?simplify
> ?assume
> ?factor
```

Mithilfe dieser Befehle können Sie die Grenzwerte nun bestimmen.

ÜBUNG [02]:

1.) Versuchen Sie, die Grenzwerte $\lim_{k \to \infty} \left\{ (-1)^k - (-1)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\}$, $\lim_{k \to \infty} \left\{ (-1)^k - \left(-1 + \frac{1}{k^2}\right)^k \right\}$ und $\lim_{k \to \infty} \sin(k\pi)$ zu berechnen, wobei Sie zusätzlich zu `limit` die Befehle `simplify` und assume benutzen.
2.) Bei der zweiten Folge sollte Maple immer noch keinen Grenzwert ermittelt haben. Versuchen Sie es zusätzlich mit dem Befehl `factor`.

Enthalten die Folgenterme irgendwelche Parameter, deren Wert nicht bekannt ist, dann ist bei der Berechnung der Grenzwerte mittels Maple höchste Vorsicht geboten. Maple macht nämlich bei der Berechnung stillschweigend gewisse Annahmen über die Parameter. Diese Annahmen werden allerdings nicht angegeben und sind häufig auch nicht am Ergebnis zu erkennen.

ÜBUNG [03]:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Maple und korrigieren Sie die Ergebnisse:

1.) $\lim_{k \to \infty} \frac{a}{a + \frac{1}{k}}$,

2.) $\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{b}{k} - \frac{2}{k}}{\frac{b}{k} - \frac{2}{k+1}}$.

Eine sehr bekannte Folge ist die Folge der Fibonacci-Zahlen f_n. Diese sind rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Rekursiv bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Werte anhand der vorherigen Werte in der Folge berechnet werden.

ÜBUNG [04]:
1.) Schreiben Sie eine Prozedur `frek:=proc(n::nonnegint)`, welche die n-te Fibonacci-Zahl rekursiv berechnet, d. h. indem es jeweils sich selbst mit kleineren Zahlen wieder aufruft, analog zu obiger Definition von f_n. 2.) Schreiben Sie eine Prozedur `fit:=proc(n::nonnegint)`, welche die n-te Fibonacci-Zahl iterativ berechnet, d. h. mit einer Schleife. 3.) Bestimmen Sie mit beiden Prozeduren f_{30}. Warum ist eine der beiden deutlich schneller? 4.) Bestimmen Sie die ersten 15 Fibonacci-Zahlen.

Sie können den `plot`-Befehl nutzen, um diese Werte graphisch darzustellen:

```
> plot(fit,0..14);
```

Das Maple-Paket `combinat`, das Sie mit

```
> with(combinat);
```

laden können, enthält einen Befehl `fibonacci`, der genau das tut, was Sie erwarten:

```
> fibonacci(14);
```

Nun betrachten wir die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ÜBUNG [05]:
1.) Geben Sie die ersten 15 Werte der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus und plotten Sie sie. 2.) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Folge an, welche die f_n nicht mehr enthält.

Der Plot lässt vermuten, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Wir wollen nun zunächst annehmen, dass dies tatsächlich gilt und den Grenzwert bestimmen. Das geht im Wesentlichen ohne Maple, allerdings können auftretende Gleichungen mit Maple gelöst werden. Als potenziellen Grenzwert erhält man $\Phi := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1.618033989$. Diese Zahl ist auch als goldener Schnitt bekannt. Wir definieren $\Psi := \Phi^{-1}$.

Damit haben wir gezeigt: Wenn die Folge konvergent ist, dann ist der Grenzwert Φ. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge tatsächlich konvergent ist. In den Übungsaufgaben zur Analysis muss man dazu meistens zeigen, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Wie Sie aber am Plot sehen können, ist die Folge zumindest im untersuchten Bereich nicht monoton. Wir müssen also anders vorgehen.

ÜBUNG [06]:

1.) Zeigen Sie mit oder ohne Maple: Φ und $-\Psi$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$. Außerdem gilt $\Psi = \Phi - 1$.

2.) Zeigen Sie mit oder ohne Maple: $|\Phi - x_n| = \left|\frac{\Phi - x_{n-1}}{\Phi \cdot x_{n-1}}\right| \leq \Psi |\Phi - x_{n-1}|$ für $n \geq 2$.

3.) Zeigen Sie, dass aus 2.) tatsächlich $\lim_{n \to \infty} x_n = \Phi$ folgt.

Manchmal kann Maple für eine rekursiv definierte Folge eine geschlossene Darstellung berechnen. Dazu dient der Befehl `rsolve`.

```
> ?rsolve
```

Diesen verwenden wir in der folgenden Übung. Da Sie in den letzten Übungen vermutlich bereits einige Variablennamen "verbraucht" haben, führen wir zunächst einen

```
> restart;
```

durch.

ÜBUNG [07]:

Berechnen Sie mittels rsolve eine geschlossene Darstellung für die Fibonacci-Zahlen. Falls im Ergebnis zunächst noch die Anfangsglieder f_0 und f_1 auftauchen, eliminieren Sie diese mithilfe des subs-Befehls.

Ihr Ergebnis sollte der Formel von Moivre-Binet $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ entsprechen. Beachtet man, dass der Wert in der ersten Runden Klammer gleich dem goldenen Schnitt Φ ist und dass die zweite runde Klammer gleich $-\Psi$ ist, dann kann man diese Gleichung auch schreiben als $f_n = \frac{\Phi^n - (-\Psi)^n}{\sqrt{5}}$.