Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 4

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 20 (ab 15. Mai) testiert.

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra);
```

Sie kennen sicher den *Gauß*-Algorithmus aus der linearen Algebra, mit dem eine Matrix in die *reduzierte Zeilenstufenform* gebracht werden kann. Diesen wollen wir in Maple implementieren.

Für die folgende Aufgabe kann der Befehl IdentityMatrix, mit dem Sie eine Einheitsmatrix erzeugen können, sehr hilfreich sein. So erstellt

```
> IdentityMatrix(3,compact=false);
```

eine 3×3-Einheitsmatrix. Wenn Sie `compact=false` weglassen, können Sie die Einträge der Matrix nicht mehr ändern.

Auch könnte Ihnen der Befehl `break` nützen, mit dem Sie eine Schleife vorzeitig verlassen können. Beispiel:

```
> for i from 1 to 5 do
    print(i);  # Mit print können Sie i ausgeben
    if (i = 3) then
      break;
    end if;
  end do;
```

Wie Sie sehen, endet die Schleife bereits im dritten Durchlauf.

Bedenken Sie weiterhin, dass Sie zum Prüfen auf Ungleichheit in Maple <> (statt ! = wie z. B. in C) verwenden:

```
> if (2<>3) then
    print("2 ist ungleich 3");
  end if;
```

ÜBUNG [01]:

1.) Zeigen Sie, dass die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix in $\mathbb{R}^{m \times n}$ immer existiert. *Hinweis: Beachten Sie alle Randfälle (z. B. 0 auf der Diagonalen).*
2.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die reduzierte Zeilenstufenform ausrechnet. Schreiben Sie dazu zuerst drei Hilfsprogramme, die zu gegebenen Parametern die Elementarmatrizen ausrechnen. Dann verwenden Sie diese, um die gegebene Matrix spaltenweise abzuarbeiten.
Hinweis: Sorgen Sie dafür, dass Ihr Programm auch in allen Randfällen und auch für nicht-quadratische Matrizen funktioniert.
3.) Beweisen oder widerlegen Sie:
 a) Ist $M \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, so gilt dies auch für die reduzierte Zeilenstufenform, sprich alle Einträge der reduzierten Zeilenstufenform sind rational.
 b) Ist $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, so gilt dies auch für die reduzierte Zeilenstufenform, sprich alle Einträge der reduzierten Zeilenstufenform sind ganz.

Der Gauß-Algorithmus kann benutzt werden, um eine Matrix zu invertieren. Auch können damit Determinanten berechnet werden. Die folgende Übung dient dazu, Ihr Programm zu diesen Zwecken anzuwenden. In dieser Übung müssen Sie unter Umständen zwei Matrizen aneinander hängen. Dazu können Sie < . . . | . . . > verwenden:

```
> M:=Matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6]);
  N:=IdentityMatrix(2);
```

```
> <M|N>;
```

Um aus einer solchen Matrix Spalten zu extrahieren, verwenden Sie Column. Mit `Matrix` können Sie aus den Spalten wieder eine Matrix zusammensetzen:

```
> Column(<M|N>,3..5);
  Matrix([Column(<M|N>,2..4)]);
```

Beachten Sie die eckigen Klammern um Column, da `Matrix` eine Liste der Spalten (und keine Folge) benötigt.

ÜBUNG [02]:

Nutzen Sie in dieser Aufgabe Ihr Programm aus Übung [01] geschickt.
1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ testet, ob diese invertierbar ist und im positiven Fall das Inverse ausrechnet. Verwenden Sie hierbei nur das Programm aus Übung [01] und nicht die in Maple enthaltenen Programme zum Invertieren von Matrizen.
2.) Schreiben Sie ein Programm, das die Determinante einer gegebenen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausrechnet. Verwenden Sie hierbei nur eine Modifikation des Programms aus Übung [01] und nicht den Befehl `Determinant`.

In der nächsten Übung werden Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet. Dabei arbeiten wir über dem Körper $K := \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$. Sie können p als Parameter an Ihre Funktionen übergeben, um damit rechnen zu können. Verwenden Sie den Befehl mod für Rechnungen in K, z. B.

```
> 5+4 mod 7;
  4*4 mod 5;
  5/2 mod 3;
```

ÜBUNG [03]:

Sie dürfen in dieser Aufgabe die in Maple definierte Funktion `Determinant` verwenden.

1.) Schreiben Sie ein Programm, das das charakteristische Polynom einer Matrix $M \in K^{n \times n}$ ausrechnet.

2.) Wie kann man am charakteristische Polynom ablesen, ob eine Matrix invertierbar ist? Beweisen Sie Ihr Kriterium und schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix $M \in K^{n \times n}$ anhand Ihres Kriteriums entscheidet, ob M invertierbar ist.

3.) Schreiben Sie ein Programm, das die Eigenwerte und Eigenräume einer Matrix $M \in K^{n \times n}$ ausrechnet und dazu das Programm aus 1.) verwendet. *Hinweis: Sie können Polynome über K mit dem Befehl* `factor` *faktorisieren. Zur Bestimmung von Eigenräumen ist der Befehl* `NullSpace` *hilfreich, mit dem Sie den Kern einer Matrix berechnen können.*