Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 5

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 21 (ab 22. Mai) testiert.

Aufgaben: 5

```
> restart;
```

In diesem Worksheet geht es um die grundlegenden Begriffe zur Stetigkeit von Abbildungen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie folgende Kriterien für die Stetigkeit einer Funktion an:
1.) ϵ-δ-Kriterium
2.) Folgenkriterium

Oft definiert man Funktionen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereichs auf unterschiedliche Weise. So nimmt beispielsweise die Dirichlet-Funktion
$\mathrm{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ auf den rationalen Zahlen den Wert 1 und auf den irrationalen Zahlen den Wert 0 an. Solche Funktionen können in Maple mit dem Befehl `piecewise` angegeben werden. Manchmal ist dabei der Befehl `is` nützlich:

```
> Dir:=x->piecewise(is(x,rational),1,0);
  Dir(2);
  Dir(sqrt(2));
```

```
> ?piecewise
```

```
> ?is
```

Außerdem stellt Maple den Befehl `iscont` zur Verfügung, mit dem Funktionen auf Stetigkeit überprüft werden können.

```
> ?iscont
```

Leider funktioniert die Kombination aus `piecewise` und `iscont` nicht immer zuverlässig. Dies soll in der folgenden Übung untersucht werden.

ÜBUNG [02]:

Überprüfen Sie, für welche der folgenden Funktionen `iscont` ein korrektes Ergebnis liefert.

1.) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 2.) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

3.) $f_3 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n & x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist die gleichmäßige Stetigkeit.

ÜBUNG [03]:

1.) Geben Sie die Definition (ϵ-δ-Kriterium) von gleichmäßiger Stetigkeit an. Worin besteht der Unterschied zum ϵ-δ-Kriterium für Stetigkeit?

2.) Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := x \to \frac{1}{x^2+1}$ gleichmäßig stetig ist.

3.) Prüfen Sie, ob iscont mit g funktioniert und plotten Sie g.

4.) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Plotten Sie sie im Intervall $[\delta, 1]$ für ein klein gewähltes $\delta > 0$. Wie wird die Tatsache, dass die Funktion nicht gleichmäßig stetig ist, im Plot deutlich?

5.) Die Einschränkung von $\ln$ auf das Intervall $[\delta, 1]$ ist gleichmäßig stetig. Aus welcher Eigenschaft des Intervalls folgt das?

Zum Ende dieses Worksheets soll es um die Anwendung von stetigen Abbildungen gehen. Dabei spielt der Zwischenwertsatz eine wichtige Rolle.

ÜBUNG [04]:

1.) Geben Sie den Zwischenwertsatz an und begründen Sie anschaulich, warum er gilt.

2.) Gegeben ist die Gleichung $x^6 + 3\sin(x) = 3$. Zeigen Sie, dass diese Gleichung mindestens zwei Lösungen in den reellen Zahlen besitzt.

Eine Anwendung des Zwischenwertsatzes ist das Bisektionsverfahren, das in der folgenden Prozedur implementiert ist. Mit diesem Verfahren können Nullstellen stetiger Funktionen numerisch bestimmt werden.

```
> Bisektion:=proc(f, a0, b0)
     # Nullstellenbestimmung per Bisektion
      # f: stetige Funktion
      # a0: Intervallgrenze mit f(a0) < 0
      # b0: Intervallgrenze mit f(b0) > 0

    local x0,a,b;
    a := a0;
    b := b0;
    x0 := (a+b)/2;
    while f(x0) <> 0 do
      if evalf(f(a)*f(x0)) < 0 then
        b := x0;
        x0 := (a+b)/2;
      else
        a := x0;
        x0 := (a+b)/2;
      end if:
    end do:
    return x0;
  end proc:
```

ÜBUNG [05]:

1.) Erklären Sie, wie das Bisektionsverfahren funktioniert und versehen Sie es mit Kommentaren.
2.) Das Bisektionsverfahren findet nicht notwendigerweise eine exakte Nullstelle, sondern nur eine numerische Näherung. Führen Sie einen neuen Parameter `tol` ein, mit dem Sie die Toleranz einstellen können: Das Ergebnis von `Bisektion` soll höchstens `tol` von einer Nullstelle entfernt sein. *Hinweis: Mit dem Befehl* `abs` *können Sie den Betrag einer Zahl bestimmen.*
3.) Schreiben Sie eine Prozedur, die das Bisektionsverfahren anwendet und dabei rekursiv vorgeht.