Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 7

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 24 (ab 12. Juni) testiert.

Aufgaben: 6

```
> restart;
```

In diesem Blatt soll es um das Differenzieren von Funktionen gehen. Wir starten wieder mit einigen Definitionen:

ÜBUNG [01]:

Geben Sie folgende Definitionen an:
1.) Grenzwert einer Funktion,
2.) differenzierbar,
3.) Ableitung.

Funktionen anhand der Definition abzuleiten ist oft nicht sehr einfach. Sie kennen vermutlich schon einige Regeln, die bei der Bestimmung von Ableitungen sehr nützlich sind. In der folgenden Übung sollen diese bewiesen werden.

ÜBUNG [02]:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei in $x \in U$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie mit Maple die folgenden Gleichungen:
1.) $(\lambda \cdot f + g)'(x) = \lambda \cdot f'(x) + g'(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Linearität),
2.) $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$ (Produktregel),
3.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$ (Quotientenregel)

Sei nun $V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f(U) \subseteq V$ und $h : V \to \mathbb{R}$ in $f(x)$ differenzierbar. Beweisen Sie mit Maple:
4.) $h(f(x)) = h'(f(x)) \cdot f'(x)$ (Kettenregel)

Nun sollen von einigen konkreten Funktionen die Ableitungen bestimmt werden.

ÜBUNG [03]:

1.) Entscheiden Sie unter Verwendung der Definition der Differenzierbarkeit, welche der folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Maple. Dazu bieten sich zum Beispiel die Befehle `diff` oder `limit` an.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ *(Hinweis: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)* und

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

2.) Bestimmen Sie unter Verwendung der Eigenschaften aus Übung [02] die Ableitungen der folgenden Funktionen in den Punkten, in denen diese existieren. Sie dürfen jetzt bekannte Ableitungen benutzen, ohne Sie zu beweisen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Maple.

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\sin(x) - x\cos(x))^5$ und

$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\ln(\sin(x)) \cdot x^2}$.

Mit dem Wissen aus den vorherigen Übungen können Sie unter anderem Polynomfunktionen, die Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzte Funktionen ableiten. Nun wollen wir dies in ein Programm umsetzen. Dazu könnte der Befehl `coeff`, mit dem Sie auf die Koeffizienten eines Polynoms zugreifen können, sehr nützlich sein:

```
> f:=4*x^3+123*x^2+x+750;
  coeff(f,x,2);
  coeff(f,x,0);
```

ÜBUNG [04]:

1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einem gegebenen Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ und einem gegebenen $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung der Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ berechnet. Dabei dürfen Sie nicht die Befehle `diff`, `D` oder `limit` verwenden.

2.) Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion

$h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^7 + x^3 + x + 1$

3.) Schreiben Sie ein Programm, das mithilfe des Programms aus 1.) zu einem gegebenen Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ und einem gegebenen $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung der Funktion $\exp \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{f(x)}$ berechnet.

4.) Bestimmen Sie jeweils die zehnte Ableitung der Funktionen

$h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^{50} - 4x^{23} + 5x^{12} - x^3 + 6}$ und

$h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{10x^{1000}}$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit `diff`.

Betrachten wir nun einige Abwandlungen des Differentialquotienten:

ÜBUNG [05]:

1.) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 := 0$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot f(x)$ in x_0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(x_0)$.

2.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $x \in (a, b)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt x ist, gilt $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} = f'(x)$.

3.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $x \in (a, b)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$ existiert, ist f differenzierbar in x.

Differenzierbare Funktionen können auch in der folgenden Form geschrieben werden:

Satz (lineare Approximaton): Sei $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathrm{D}$. Eine Funktion $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ für alle $x \in \mathrm{D}$, wobei $\phi : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die die Bedingung $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$ erfüllt. In diesem Fall gilt $c = f'(x_0)$.

Lassen wir ϕ weg, so erhalten wir eine Näherung (Approximation) von f durch eine Polynomfunktion vom Grad 1.

ÜBUNG [06]:

1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer differenzierbaren Funktion f die lineare Approximation $L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ berechnet.

2.) Plotten Sie die Funktion $f := \sin$ und ihre lineare Approximation um $x_0 := 0$.

Führt man die Idee hinter der linearen Approximation mit höheren Ableitungen weiter, so erhält man die Taylor-Entwicklung. Diese wird auf einem späteren Blatt behandelt.