Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 8

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 25 (ab 19. Juni) testiert.

Aufgaben: 5

```
> restart;
  with(LinearAlgebra);
```

In diesem Übungsblatt soll es um Bilinearformen und Skalarprodukte gehen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:
1.) Bilinearform
2.) Skalarprodukt
3.) Gram-Matrix

Zunächst wollen wir uns die Gram-Matrix etwas näher ansehen.

ÜBUNG [02]:

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Sei ${}_B\Phi^B$ die Gram-Matrix dieses Skalarprodukts bezüglich B.

1.) Zu $v \in V$ bezeichne ${}^Bv \in K^{n \times 1}$ den Koordinatenvektor, d.h. $v = \sum_{i=1}^{n} ({}^Bv)_i \cdot b_i$. Zeigen Sie: $\Phi(v, w) = ({}^Bv)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw$ für alle $v, w \in V$.

2.) Zeigen Sie: ${}_B\Phi^B$ ist invertierbar.

3.) Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutig bestimmte Basis $B^* = (b_1^*, b_2^* \ldots, b_n^*)$, so dass $(b_i, b_j^*) = \delta_{ij}$ das Kronecker-Delta ist. Diese Basis heißt Dualbasis zu B bezüglich $(\cdot, \cdot)$. *Hinweis: Die Gram-Matrix des Skalarprodukts bezüglich B ist invertierbar.*

Nun betrachten wir den Spezialfall eines $\mathbb{R}$-Vektorraums.

ÜBUNG [03]:

1.) Auf $\mathbb{R}^n$ sei eine symmetrische Bilinearform definiert durch

$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^{tr}Gy$ für eine symmetrische Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass

$T^{tr}GT = \mathrm{diag}(1, 1,..., 1,-1,-1,...,-1, 0, 0,..., 0) = \mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0_{t \times t})$ gilt. Das Tripel (r, s, t) ist eindeutig bestimmt und wird die **Signatur** von β genannt. *Hinweis: Was sagt der Spektralsatz über G aus?*

2.) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebener Matrix G die Signatur und die Matrix T ausrechnet. *Hinweis: Ihr Algorithmus wird sich vermutlich am Gauß-Algorithmus orientieren. Anstatt die Pivot-Elemente an eine geeignete Stelle zu tauschen, sollten Sie mit Additionen arbeiten. Ansonsten könnte eine andere Null an die entsprechende Stelle gelangen.*

3.) Wie kann man an der Signatur ablesen, ob β ein Skalarprodukt ist?

Sie kennen sicher bereits das Standardskalarprodukt. Es gibt aber durchaus auch noch andere Skalarprodukte, etwa das folgende.

ÜBUNG [04]:

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ haben wir die Bilinearform $\gamma: W \times W \to \mathbb{R},\ (p, q) \mapsto \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass γ ein Skalarprodukt ist und bestimmen Sie die Dualbasis von $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ bezüglich γ. *Hinweis: Stellen Sie die Gram-Matrix von γ bezüglich einer geeigneten Basis auf.*

Weiter oben haben Sie bereits Dualbasen kennengelernt. In der folgenden Übung interessieren wir uns für selbstduale Basen, d. h. Basen B mit $B^* = B$. Diese lassen sich mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren berechnen.

ÜBUNG [05]:

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Auf V sei ein Skalarprodukt β gegeben durch eine Matrix G, d. h. $\beta : V \times V \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto ({}^E v)^{tr} \cdot G \cdot ({}^E w)$, wobei E die Standardbasis ist.

1.) Schreiben Sie ein Programm, das G als Eingabe erhält, das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren ausführt und schließlich eine selbstduale Basis B ausgibt.

2.) Nutzen Sie Ihr Programm, um eine selbstduale Basis von W aus Übung [04] bezüglich γ zu finden.
3.) Was haben selbstduale Basen mit der Matrix T aus Übung [03] zu tun?