Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 9

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 26 (ab 26. Juni) testiert.

Aufgaben: 7

```
> restart;
```

In diesem Worksheet soll es um die Taylorsche Formel und Taylorreihen gehen.

ÜBUNG [01]:

1.) Geben Sie die Taylorsche Formel mit dem Restglied von Lagrange an.
Geben Sie außerdem folgende Definitionen an:
2.) Potenzreihe,
3.) Entwicklungspunkt,
4.) Konvergenzradius,
5.) Taylorreihe,
6.) lokales Minimum und lokales Maximum.

Eine erste Anwendung der Taylorschen Formel ist die folgende Übung.

ÜBUNG [02]:

Beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel:

$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \le \ln(1+x) \le x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ für $x \ge 0$.

Bei der Taylorentwicklung kann man schön beobachten, wie sich die Taylorpolynome an die eigentliche Funktion anschmiegen.

ÜBUNG [03]:

1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar), einer Stelle x_0 und einem beliebigen $k \in \mathbb{N}$, das Taylorpolynom vom Grad k um x_0 zurückgibt. Dabei dürfen Sie nicht die vordefinierten Funktionen zur Berechnung von Taylorpolynomen verwenden, insbesondere nicht `taylor`; selbstverständlich dürfen Sie aber damit Ihre Ergebnisse überprüfen.

2.) Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 3 der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x^2+1)}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = -2$ und der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan(8x^4 - 6x^2 + 2)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 4$.

3.) Plotten Sie jede der Funktionen aus 2.) zusammen mit ihrem jeweiligen Taylorpolynom.

4.) Was gibt Ihr Programm zurück, wenn f eine Polynomfunktion vom Grad k ist?

ÜBUNG [04]:

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Taylorreihe einer Funktion f konvergiert genau dann gegen $f(x)$ für ein x aus dem Definitionsbereich, wenn das Restglied gegen Null konvergiert.

Betrachten wir nun noch einmal die Funktion aus Übung [02].

ÜBUNG [05]:

Wie sieht die Taylorreihe von $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aus? Was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe? Konvergiert die Taylorreihe gegen $f(x)$?

Mit der Taylorentwicklung lassen sich auch die bekannten Sätze über lokale Maxima und lokale Minima von differenzierbaren Funktionen beweisen.

ÜBUNG [06]:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) zweimal stetig differenzierbar ist mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Außerdem existiere ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

1.) Beweisen Sie mit der Taylorentwicklung, dass x_0 ein lokales Minimum ist.

2.) Ist x_0 ein globales Minimum?

3.) Ist x_0 ein globales Minimum, wenn wir Stetigkeit nur auf (a, b) verlangen?

4.) Zeigen Sie mit Maple, dass die Funktion $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ ein globales Minimum besitzt.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Auf Blatt 5 haben Sie bereits das Bisektionsverfahren zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle von f kennengelernt. Ein weiteres Verfahren zur Nullstellenbestimmung ist das **Newton-Verfahren**. Dabei wird jeweils von einem Punkt x_n aus die Tangente an f bestimmt und x_{n+1} auf deren Nullstelle gesetzt. Dieser Schritt wird nun so lange wiederholt, bis der neue Punkt hinreichend nahe an der Nullstelle liegt.

ÜBUNG [07]:

1.) Bestimmen Sie eine Formel, mit der x_{n+1} aus x_n, $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ berechnet werden kann.
2.) Schreiben Sie eine Prozedur, die eine stetig differenzierbare Funktion f, den Startwert x_0 und eine Toleranz tol als Parameter hat und mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle von f sucht.
3.) Bestimmen Sie das globale Minimum der Funktion $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ mithilfe des Newtonverfahrens.