

# Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 10

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 27 (ab 03. Juli) testiert.

Aufgaben: 3

```
> restart;  
with(LinearAlgebra);
```

Diese Woche beschäftigen wir uns mit Basiswechseln.

## ÜBUNG [01]:

Betrachten Sie die folgenden Tupel von Vektoren aus  $\mathbb{R}^4 \times 1$ :

$$B_1 = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$, B_2 = \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right), B_3 = \left( \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right), B_4 = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

1.) Welche dieser Tupel sind Basen des  $\mathbb{R}^4 \times 1$ ?

2.) Berechnen Sie für alle Basen  $B_i$  und  $B_j$  die Basiswechselmatrizen  ${}^{B_i}id^{B_j}$ . Hinweis: Ein Umweg über die Standardbasis kann sehr viel Zeit sparen.

3.) Schreiben Sie die Vektoren  $v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  und  $w := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  in jeder dieser Basen.

## ÜBUNG [02]:

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $U, V$  zwei  $\mathbb{R}$ -Untervektorräume des  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ . Definiere  $M(U, V) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Xu \in V \text{ für alle } u \in U\}$ .

- 1.) Zeigen Sie, dass  $M(U, V)$  ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist.
- 2.) Wie können Sie Basiswechselformen geschickt nutzen, um eine Basis von  $M(U, V)$  auszurechnen? Können Sie aus den Dimensionen von  $U$  und  $V$  auf die Dimension von  $M(U, V)$  schließen? *Hinweis: Ergänzen Sie jeweils Basen von  $U$  und  $V$  zu Basen des  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  und betrachten Sie lineare Abbildungen bezüglich dieser Basen. Danach wechseln Sie auf die Standardbasis.*
- 3.) Schreiben Sie ein Programm, das zwei  $\mathbb{R}$ -Teilräume  $U, V \leq \mathbb{R}^{n \times 1}$  als Eingabe erhält und eine Basis von  $M(U, V)$  ausgibt. Sie können hierbei selbst entscheiden, welche Form die Eingabe hat.

- 4.) Testen Sie Ihr Programm mit  $U := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3 \times 1}$  und  $V := \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

Nun betrachten wir den Vektorraum der Matrizen  $\mathbb{R}^{n \times m}$  und wenden die vorherige Übung an.

## ÜBUNG [03]:

Seien jetzt  $U$  und  $V$   $\mathbb{R}$ -Teilräume des  $\mathbb{R}^{n \times m}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$  (Die Elemente von  $U$  und  $V$  sind also Matrizen.). Auf diesem Raum definieren wir die Standardbasis  $E = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1m}, E_{21}, \dots, E_{nm})$  der Matrizen  $E_{ij}$ , die an der Stelle  $(i, j)$  eine 1 und an allen anderen Stellen eine 0 haben.

- 1.) Schreiben Sie eine Funktion, die einen  $\mathbb{R}$ -Teilraum  $U \leq \mathbb{R}^{n \times m}$  als Eingabe erhält und diesen in der Basis  $E$  schreibt, also einen  $\mathbb{R}$ -Teilraum  $U_E \leq \mathbb{R}^{nm}$  ausgibt. Sie können wieder ein geeignetes Format für das Übergeben von Vektorräumen wählen.
- 2.) Wir betrachten auf  $\mathbb{R}^{n \times m}$  einige lineare Abbildungen:  
 $M := \{f: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \mid \text{es existiert ein } X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } f(A) = XA \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$ .  
Zeigen Sie, dass  $M$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist und geben Sie eine Basis von  $M$  an. Welche Dimension hat  $M$ ?
- 3.) Wir definieren analog zu Übung [02] die Menge  $L(U, V) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Xu \in V \text{ für alle } u \in U\}$ . Zeigen Sie, dass  $L(U, V)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist und erläutern Sie, wie Sie mithilfe der vorherigen Aufgaben eine Basis von  $L(U, V)$  berechnen können. *Hinweis: Mit dem Zassenhaus-Algorithmus kann für den Schnitt zweier Vektorräume eine Basis bestimmt werden. Sie müssen nicht begründen, warum dieser Algorithmus funktioniert.*

