Maple-Praktikum für Lehramt 2017 - Blatt 11

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 28 (ab 10. Juli) testiert.

Aufgaben: 5

```
> restart;
```

Auf diesem Blatt geht es um abzählbare und überabzählbare Mengen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:
1.) abzählbar,
2.) überabzählbar,
3.) Potenzmenge

Bei endlichen Mengen versteht man intuitiv, wann sie gleich groß sind - nämlich genau dann, wenn die Anzahl ihrer Elemente gleich ist. Bei unendlichen Mengen werden solche Größenvergleiche schwieriger, da die Elemente nicht mehr so einfach gezählt werden können. Trotzdem kann man die Mächtigkeit (Kardinalität) unendlicher Mengen vergleichen.

Definition: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen **gleichmächtig**, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : M_1 \to M_2$ gibt.

ÜBUNG [02]:

1.) Sei M eine Menge. Außerdem existiere eine injektive Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{N}$. Kann man daraus schließen, dass M abzählbar ist?
2.) Beweisen Sie, dass jede Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist.
3.) Seien M_1 und M_2 endliche Mengen und sei $\phi : M_1 \to M_2$ injektiv. Sind die beiden Mengen dann gleichmächtig? Was passiert, wenn man statt Injektivität Surjektivität annimmt?

In den folgenden Aufgabe soll nachgeprüft werden, dass bestimmte Mengen abzählbar sind.

ÜBUNG [03]:

Schreiben Sie ein Programm, dass jeder ganzen Zahl genau eine natürliche Zahl zuordnet. Was lässt sich folglich über die ganzen Zahlen und die natürlichen Zahlen sagen?

ÜBUNG [04]:

1.) Betrachten Sie die **Cantorsche Paarungsfunktion** $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto y + \sum_{i=0}^{x+y} i.$

Zeigen Sie, dass π injektiv ist.

2.) Zeigen Sie mithilfe von Übung [03] und der Abbildung π aus 1.), dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

3.) Zeigen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ erneut, indem Sie zeigen, dass die Abbildung $\vartheta : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{Q},\ (i, j, k) \mapsto \dfrac{i-j}{k+1}$ surjektiv ist.

Nun betrachten wir Potenzmengen und deren Mächtigkeit.

ÜBUNG [05]:

1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen endlichen Menge M die Potenzmenge $\mathrm{Pot}(M)$ berechnet. Geben Sie eine Formel für die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Pot}(M)$ an und beweisen Sie sie. Können eine endliche Menge M und $\mathrm{Pot}(M)$ gleichmächtig sein?

2.) Beweisen Sie für beliebige Mengen M, dass es keine surjektive Abbildung $M \to \mathrm{Pot}(M)$ gibt und damit, dass $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. *Hinweis: Der erste Teil hilft Ihnen diesmal nicht weiter.*