Normierte Räume: Erste Beispiele

Aufgaben: 4

```
> restart;
  with(plots):
  with(LinearAlgebra):
```

Definition

Normierte Räume sind Vektorräume mit einem Abstandsbegriff, der es erlaubt, topologische und analytische Betrachtungen in diesen Vektorräumen anzustellen. Hervorzuheben ist erst einmal der Fall endlicher Dimension. Der unendlich dimensionale Fall dient meistens als grundlegendes technisches Werkzeug.

MATH: Ein **normierter Raum** ist ein *K*-Vektorraum *V* mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zusammen mit einer Abbildung

$$\| \quad \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\|,$$

die **Norm** genannt wird und folgende Eigenschaften hat:

1.) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
für alle $v \in V$.

2.) $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
für alle *a2 K* und alle *v2 V*. Dabei bezeichnet $|a|$ den Absolutbetrag von $a \in K$.

3.) Dreiecksungleichung:
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$
für alle $v, w \in V$.

Möglicherweise ist der Fall $K = \mathbb{C}$ etwas abstrakt im Augenblick. Es genügt, wenn wir im Folgenden immer mit $K = \mathbb{R}$ arbeiten.

BEISPIEL: Sei *V*=*K* ein Körper der obigen und $\| \quad \|$ der gewöhnliche Absolutbetrag.

MATH: Die erste Bedingung erlaubt es, den Nullvektor an seiner Norm zu erkennen.
Die zweite Bedinung ermöglicht es, jeden Vektor $\neq 0$ auf Norm Eins zu normieren (im Falle $K = \mathbb{R}$ auf genau zwei Arten).
Die dritte Bedingung, also die Dreiecksungleichung, ist eine Konvexitätsbedingung. Da nur zwei Vektoren involviert sind, kann man sich diese sehr schön in der Ebene veranschaulichen:
Sei

$$\| \quad \|_{\leq 1} := \{v \in V | \quad \|v\| \leqq 1\}$$

die Menge der Vektoren der Norm $\leqq 1$. Dann impliziert die

Dreiecksungleichung, dass mit je zwei Vektoren auch deren Verbindungsstrecke (in Paramterdarstellung) in der Menge $\| \ \|_{\leq 1}$ liegt:

$$v, w \in \|\|_{\leqq 1}, 0 \leqq \lambda \leqq 1 \Rightarrow \lambda v + (1-\lambda) w \in \| \ \|_{\leqq 1}$$

BEISPIEL: $V = K^n$. Als einfachste Norm bietet sich an:

$$\|(a_1,..., a_n)\| := \max(|a_1|,..., |a_n|)$$

für alle $(a_1,..., a_n) \in K^n$.

Wir sprechen von der **Maximumsnorm**.

Euklidische Norm und das Standardskalarprodukt: Elementargeometrische Aspekte

Wir betrachten eine besonders schöne Norm auf $\mathbb{R}^n$, welche uns von der Elementargeometrie her vertraut ist:

BEISPIEL: Sei $K = \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die (Standard-)Euklidische Norm:

$$\|(a_1,..., a_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Diese Norm wird von dem sogenannten Standard-Skalarprodukt induziert, welches zwei Vektoren zu einer Zahl verarbeitet:

```
> BilinearForm(<1|2>,<2|3>);
```

$$8 \tag{1.2.1}$$

```
> Vector[row](4,symbol=a);
  Vector[row](4,symbol=b);
```

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

```
> BilinearForm(Vector[row](4,symbol=a),Vector[row](4,symbol=
  b),conjugate=false);
```

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \tag{1.2.3}$$

```
> BilinearForm(Vector[row](4,symbol=a),Vector[row](4,symbol=
  a),conjugate=false);
```

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \tag{1.2.4}$$

Wenn man zweimal den selben Vektor einsetzt und die Quadratwurzel zieht, bekommt man unsere Norm. Die ersten zwei Normeigenschaften sind sofort klar. Bei der Dreiecksungleichung ist es nicht sofort klar.

MATH: Wir haben also

$$\Psi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:(v,w)\mapsto\sum_{i=1}^{n} v_i\cdot w_i$$

so dass

$$\|v\| := \sqrt{(\Psi(v,v))}$$

unsere Norm ist. Nun gilt die berühmte **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

$$\Psi(v,v)\cdot\Psi(w,w) - \Psi(v,w)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $(v, w) \in (\mathbb{R}^n)^2$ linear abhängig sind.

Falls du schon Determinanten von 2×2-Matrizen kennst, beachte: Die linke Seite der obigen Ungleichung ist die Determinante von

```
> <<Psi(v,v) | Psi(v,w)> , <Psi(w,v) | Psi(w,w)>>;
  Determinant(%);
```

$$\begin{bmatrix}\Psi(v,v) & \Psi(v,w)\\ \Psi(w,v) & \Psi(w,w)\end{bmatrix}$$

$$\Psi(v,v)\,\Psi(w,w)-\Psi(v,w)\,\Psi(w,v) \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

In einem Spezialfall ist die Ungleichung offensichtlich:

```
> PSI:=proc(v,w)
    BilinearForm(v,w,conjugate=false)
  end proc:
> v:=<a|0>;w:=<b|c>;
```

$$v := \begin{bmatrix} a & 0\end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

```
> <<PSI(v,v) | PSI(v,w)> , <PSI(v,w) | PSI(w,w)>>;
```

$$\begin{bmatrix} a^2 & b\,a\\ b\,a & b^2+c^2\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

```
> Determinant(%);
```

$$a^2\,c^2 \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

Was offenbar ≥ 0 ist.
Der allgemeine Fall kann (mit Hilfe von Basiswechseln) auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden.

MATH: Eine andere Sicht der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist diese:
Für $v, w \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt:

$$|\Psi(v,w)| \leq \|v\|\cdot\|w\|,$$

d. h. es gibt ein eindeutiges $\alpha\in[0,\pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\Psi(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

α heißt auch der **Winkel** zwischen *v* und *w*.

DENKANSTOSS: Die Gleichung kann man auch umschreiben zu

$$\cos(\alpha) = \Psi\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\right)$$

wobei

$$\frac{w}{\|w\|} := \frac{1}{\|w\|} \cdot w$$

ein sogenannter Einheitsvektor ist, also Norm 1 hat.

MATH: Die geometrische Bedeutung des Winkels ist der des Bogens auf dem Einheitskreis, also des in der Kugeloberfläche gemessenen Abstandes zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche. Man bleibt dabei in der von den beiden Punkten und dem Kugelmittelpunkt aufgespannten Ebene, so dass man einen Kreisbogen bekommt.
Es sei darauf hingewiesen, dass derartig detaillierte Betrachtungen bei allgemeinen normierten Räumen nicht möglich und oft auch gar nicht wünschenswert sind, da bereits die drei Axiome für Normen für Konvergenzbetrachtungen ausreichen: Je weniger man fordert, desto mehr Beispiele kann man erhoffen.

Wir wollen den Euklidischen Fall, genauer die Bedeutung des Winkels, mit Hilfe einer Aufgabe verinnerlichen.

ÜBUNG [01]:

Man berechne die Entfernung von Aachen nach Acapulco ausgehend von einem auf
6371km gerundeten Erdradius und den geographischen Breiten und Längen:

	Breite	Länge
Aachen, Deutschland	50° 47´ N	6° 05´ O
$\left(50° \, 47´ = \left(50 + \frac{47}{60}\right)°\right)$		
Acapulco, Mexiko	16° 50´ N	99° 55´ W

Hinweise: Um den Winkel Aachen-Erdmittelpunkt-Acapulco zu finden orientiere dich an

```
> ?Definition,sphericalcoordinates
```

Schreibe damit eine Funktion, die die Winkelpaare in cartesische Koordinaten umrechnet.
Bilde das Standardskalarprodukt der beiden Vektoren um den Winkel dieser beiden Vektoren zu finden.
Rechne dies in den Abstand zunächst auf der Einheitskugel, dann auf der Kugel mit Radius 6371 um.
Vorsicht bei den Angaben O und W!
Zur Kontrolle: Das Ergebnis ist etwas weniger als ein Viertel des Erdumfangs.

Euklidische Norm und das Standardskalarprodukt:

Abstrakte Aspekte

MATH: Die entscheidenden Eigenschaften, die unser Standardskalarprodukt Ψ hat, sind
i) (bilinear)

$$\psi(a \cdot v_1 + b \cdot v_2, w) = a \cdot \Psi(v_1, w) + b \cdot \Psi(v_2, w),$$
$$\psi(v, a \cdot w_1 + b \cdot w_2) = a \cdot \Psi(v, w_1) + b \cdot \Psi(v, w_2)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$.
ii) (symmetrisch)

$$\Psi(v, w) = \Psi(w, v)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
iii) (positiv definit)

$$\Psi(v, v) > 0$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

Wir nutzen dies um allgemein zu definieren:

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\Psi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii) nennt man **Skalarprodukt**.

Der Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, der aus der Analysis bekannt ist, gilt bei jedem Skalarprodukt.

ÜBUNG [02]:
1) Leite aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung bei Normen entstehend aus Skalarprodukten her. (Hinweis: Benutze i) und ii).) 2) Begründe kurz: Ein Skalarprodukt induziert eine Norm auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Hinweis: Analog zum Standardskalarprodukt)

Es gibt natürlich auch andere Vektorräume neben dem $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt. Hier ist einer:

BEISPIEL: $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit Bilinearform

$$ISp : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$$

```
> ISp:=proc(p::polynom, q::polynom)
>    int(p*q,x=0..1)
   end proc:
```

Hier ist z. B. die Matrix der Skalarprodukte zwischen den Monomen:

```
> B:=[1,x,x^2,x^3];
```

$$B := [1, x, x^2, x^3] \tag{1.3.1}$$

```
> G:=Matrix(4,4,(i,j)->ISp(B[i],B[j]));
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

Man kann also auch in diesem Raum den Vektoren, sprich Polynomen oder Polynomfunktionen, Normen zuordnen, und Paaren von solchen einen Winkel.

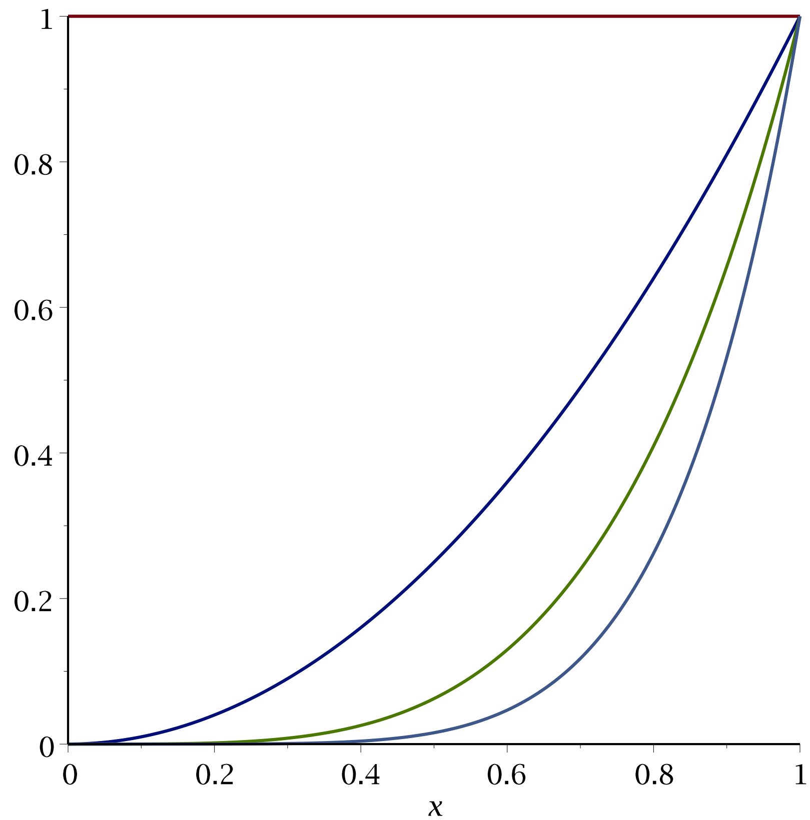
Die Bilinearität erlaubt uns Mittel der linearen Algebra zu benutzen. Wir sehen dies in der folgenden Übung.

ÜBUNG [03]:

1) Wie berechnet man nur mit Hilfe von **G** und geeigneten Vektoren **ISp**$(x^2+2, x^3+3\cdot x+1)$? Überprüfe das Ergebnis mit **ISp**.
2) Verallgemeinere: Warum reicht es aus, das Skalarprodukt zwischen den Monomen zu kennen?
3) (freiwillig) Verallgemeinere: Warum reicht es aus, das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren einer gegebenen Basis zu kennen?

MATH: Erstaunlicherweise werden die Normen der x^i mit steigendem i kleiner. Wir untersuchen einen Plot des Sachverhaltes:

```
> plot([1,(x^1)^2,(x^2)^2,(x^3)^2],x=0..1);
```



Offenbar gilt auf [0,1)

$$0 \le a^{2\cdot(i+1)} < a^{2\cdot i}$$

Dieselbe Relation gilt für die Wurzeln der Integrale.

Äquivalenz von Normen

Mit Normen lässt sich eine wichtige Klasse von offenen Mengen definieren.

MATH: Sei V ein normiert Raum mit Norm $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Dann nennen wir

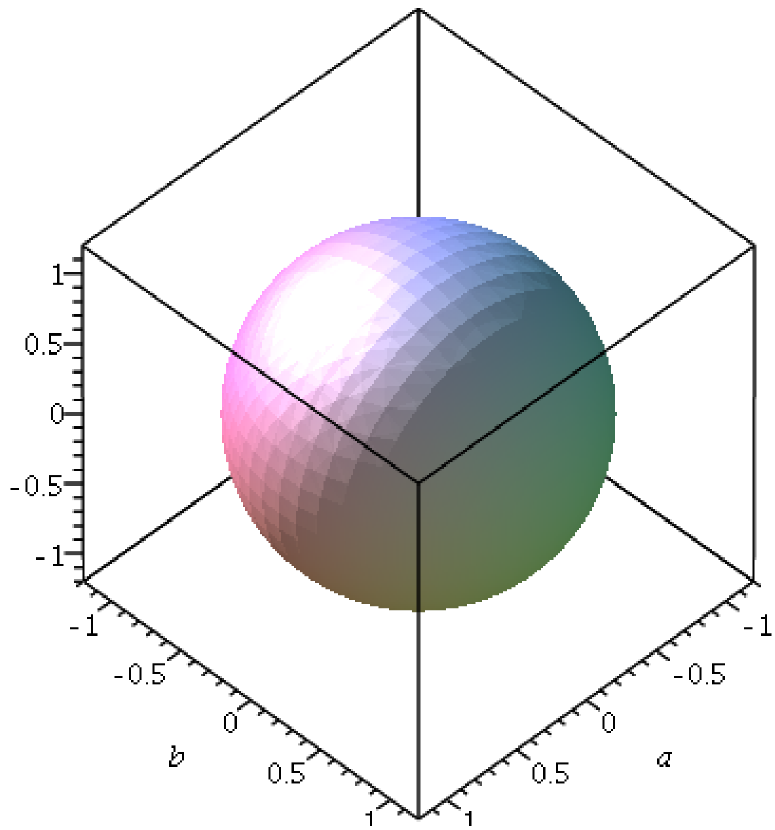
$$B_r(x) := \{y \in V \mid \|x-y\| < r\}$$

den r-**Ball** um x für $x \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wegen des zweiten Axioms für Normen betrachtet man oft zur Anschauung $B_1(0)$. Anderen Bälle um 0 erhalten wir durch Skalierung. Wir zeichnen nur den Rand eines Balles, obwohl dieser nicht Teil des Balles ist.

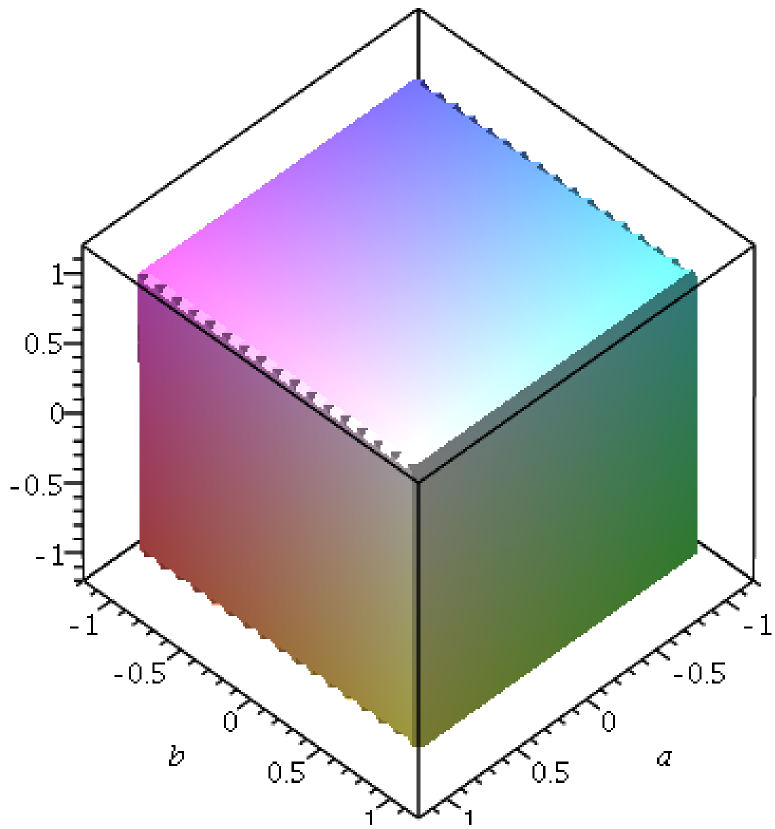
BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm $(a, b, c) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch eine Spähre.

```
> implicitplot3d(sqrt(a^2+b^2+c^2)-1,a=-1.2..1.2,b=-1.2..1.2,
  c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=surface);
```



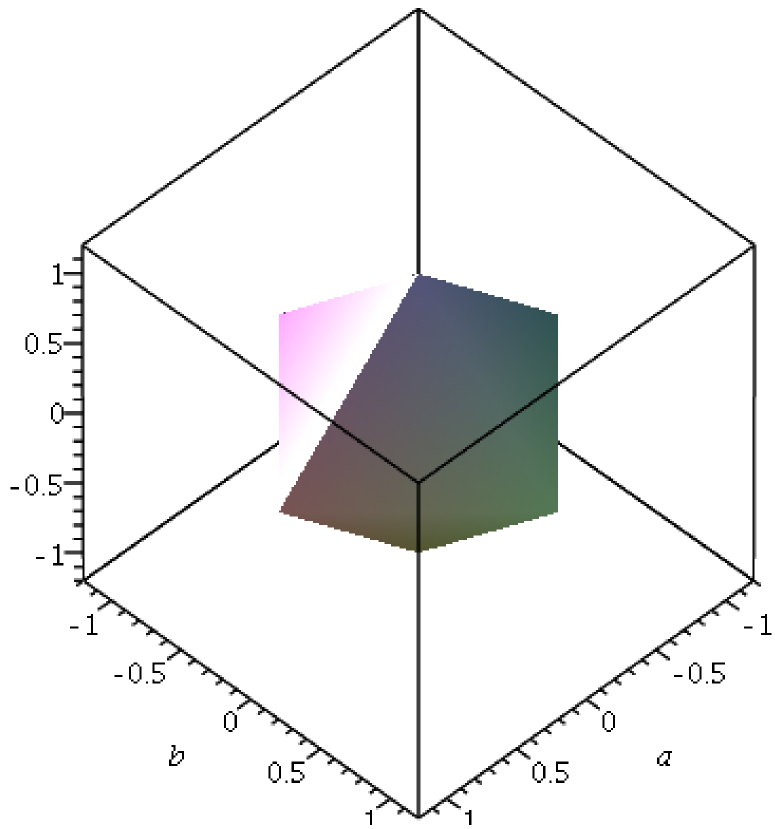
BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der Maximumsnorm $(a, b, c) \mapsto \max(|a|,|b|,|c|)$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch einen Würfel.

```
> implicitplot3d(max(abs(a),abs(b),abs(c))-1,a=-1.2..1.2,b=
  -1.2..1.2,c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=
  surface);
```



BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm $(a, b, c) \mapsto |a| + |b| + |c|$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch ein Oktaeder.

```
> implicitplot3d(abs(a)+abs(b)+abs(c)-1,a=-1.2..1.2,b=-1.2..1.2,c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=surface);
```



MATH: Zwei Normen $\| \ \|_a$ und $\| \ \|_b$ auf einem Vektorraum V nennt man **äquivalent**, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$c_1 \cdot \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq c_2 \cdot \| x \|_a$$

für alle $x \in V$.

Beachte: Die beiden Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ sind unabhängig von x.

Die 3 Normen aus den Beispielen sind äquivalent. Es gilt sogar:

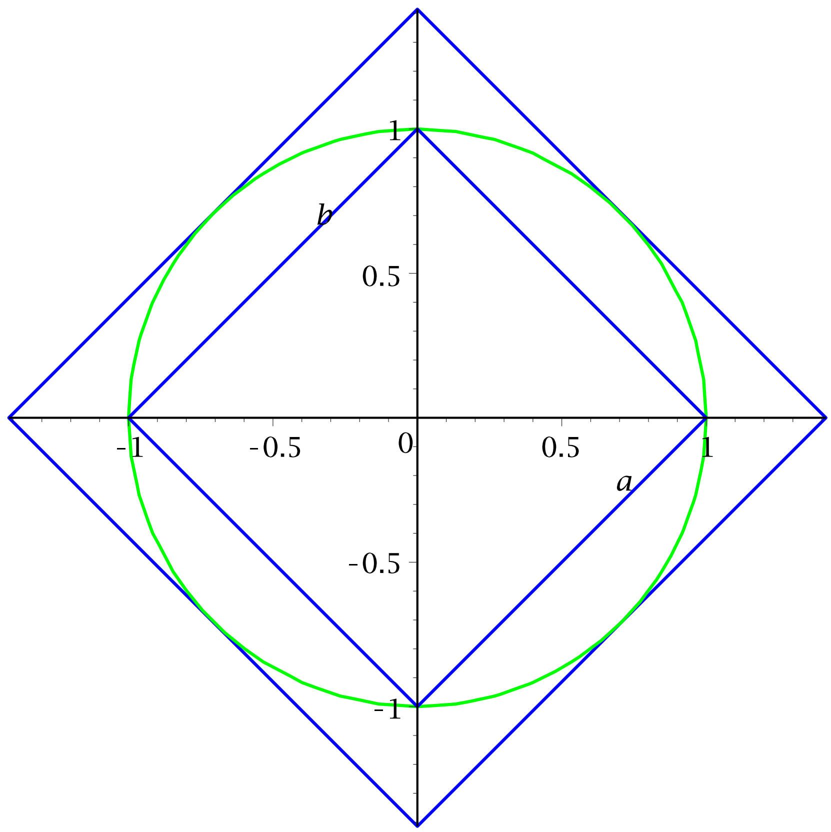
MATH: Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.

Alle obigen Beispiele sind endlich dimensional. Wir wollen die Aussage zumindest an Beispielen einsehen.

Wir stellen uns die Bedingung der Äquivalenz mit Bällen vor: Zwei Normen sind äquivalent, wenn jeder Ball der einen Norm sowohl von aussen als auch von innen durch einen Ball der anderen Norm approximiert werden kann. Die Faktoren für den Radius der jeweiligen Approximation zwischen den beiden Normen sind konstant.

BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^2$ mit der 1-Norm $(a, b) \mapsto |a| + |b|$ und der Euklidischen Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$.

```
> p1:=implicitplot(abs(a)+abs(b)-sqrt(2),a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=blue):
  p2:=implicitplot(sqrt(a^2+b^2)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=green):
  p3:=implicitplot(abs(a)+abs(b)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=blue):
  display(p1,p2,p3);
```



Die Plots deuten an: Als Konstanten kann man zum Beispiel $c_1 = 1$ und $c_2 = \sqrt{2}$ wählen.

ÜBUNG [04]:

$V = \mathbb{R}^2$ mit der Maximumnorm $(a, b) \mapsto \max(|a|,|b|)$ und der Euklidischen Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2+b^2}$.
1) Beweise durch explizite Angabe von Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$: Diese beiden Normen sind äquivalent.
2) Visualisiere mit deinen Konstanten aus dem Beweis der Äquivalenz die ineinander enthaltenen Bälle.
3) Betrachte den Vektorraum $K_{konv}^{\mathbb{N}}$ aller konvergenten Folgen aus $K^{\mathbb{N}}$. Zeige, dass die beiden Normen

$$\|..\|_1 : K_{konv}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\left(|a_i|, i \in \mathbb{N}\right)$$

und

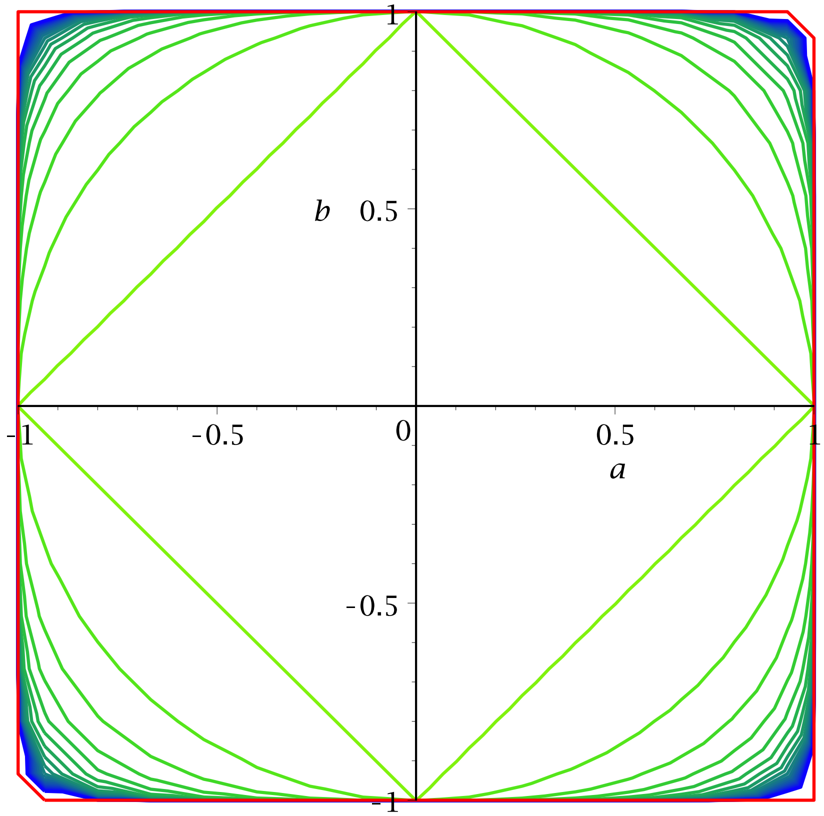
$$\|..\|_2 : K_{konv}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\left(\frac{|a_i|}{2^i}, i \in \mathbb{N}\right)$$

nicht äquivalent sind.
Hinweis: Vergleiche die beiden Normen auf der Menge der Zeilen der unendlichen Einheitsmatrix.

```
>
```

Die 1-Norm $(a, b) \mapsto |a|+|b|$ verallgemeinert sich zu einer Familie von Normen: Die p-Norm ist definiert als $(a, b) \mapsto \sqrt[p]{|a|^p+|b|^p}$. Die Euklidische Norm ist dann auch die 2-Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2+b^2}$. Wegen des Verhaltens der Einheitsbälle im folgenden Bild wird die Maximumsnorm auch oft die ∞-Norm genannt.

```
> m:=20:
  l:=map(n->implicitplot(sqrt(abs(a)^n+abs(b^n))^(1/n)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=ColorTools[Color]([1/(n+1),(m-n)/m,n/m])),[$1..m]):
  l:=[op(l),implicitplot(max(abs(a),abs(b))-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=red)]:
  display(l);
```



Konvergente Folgen in normierten Räumen

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(plots):
```

Grenzwerte und Banachräume

MATH: Sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Folge $a \in V^{\mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls ein $g \in V$ existiert, genannt der **Grenzwert** der Folge, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|a_i - g\| < \varepsilon$$

für alle $i \geq n_0$.

DENKANSTOSS: Folgere mit Hilfe der Eigenschaften einer Norm, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert.

Beispiel: Die Folge

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{2 \times 2}: \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} A^i$$

ist bezüglich der Maximumsnorm konvergent für

```
> A:=1/3*<<1 | 1> , <1 | 1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{(2.1.1)}$$

Betrachte dazu die Matrix B:

```
> B:=<<1 | 1> , <1 | 1>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(2.1.2)}$$

An den Potenzen

```
> map(i->A^i,[$1..5]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{8}{81} & \frac{8}{81} \\ \frac{8}{81} & \frac{8}{81} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{16}{243} & \frac{16}{243} \\ \frac{16}{243} & \frac{16}{243} \end{bmatrix} \right] \quad \text{(2.1.3)}$$

von A sieht man sehr einfach, dass für $i > 0$

$$A^i = \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \frac{1}{2} \cdot B$$

gilt. Nun ist

```
> sum((2/3)^i*1/2,i=1..infinity);
```

$$1 \quad \text{(2.1.4)}$$

und somit ist der Grenzwert

$$A^0 + B =$$

```
> <<2 | 1> , <1 | 2>>;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(2.1.5)}$$

Wir haben mit der Maximumsnorm der Komponenten gearbeitet, welche aber äquivalent zu jeder anderen Norm auf dem endlichdimensionalen =-Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.

DENKANSTOSS: Seien $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ äquivalente Normen auf V. Eine Folge $a \in V^{\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $\| \ \|_1$ genau dann wenn sie bezüglich $\| \ \|_2$ konvergiert. In diesem Fall sind die Grenzwerte identisch.

MATH: Jede konvergente Folge ist eine **Cauchy-Folge**. Dabei heißt $a \in V^{\mathbb{N}}$

Cauchy-Folge, falls
zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|a_i - a_j\| < \varepsilon$$

für alle $i, j \geq n_0$.

MATH: Falls umgekehrt jede Cauchy-Folge eines normierten Raumes konvergent ist, heißt der Raum **vollständig** oder **Banachraum**. Endlich dimensionale normierte Räume sind stets vollständig.

Warum sind Banachräume wichtig? Der Banachsche Fixpunktsatz wird es uns später zeigen!

Beispiel für einen Banachraum unendlicher Dimension: Der Raum $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit der Maximumsnorm als Norm.

ÜBUNG [05]:

Begründe die Behauptungen des letzten Beispiels, d.h. zeige folgendes:
1) Die Maximumsnorm $f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ist wohldefiniert als Abbildung $C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (also: es wird ein Maximum angenommen).
2) Die Maximumsnorm ist eine Norm.
3) Alle Cauchyfolgen konvergieren gegen eine Grenzfunktion.
4) Diese Grenzfunktion liegt in $C([a, b], \mathbb{R})$. (Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz)

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel für Banachräume ist der Raum der quadratsummierbaren Folgen $l^2(\mathbb{R})$:

$$l^2(\mathbb{R}) := \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\Phi: \; l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot b_i$$

bzw. mit der hierdurch induzierten Norm. Dieser Raum ist das einfachste unendlich dimensionale Analogon des $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

ÜBUNG [06]:

1) Mach dir (zum Beispiel graphisch) klar, wie Folgen mit Elementen aus dem Banachraum $l^2(\mathbb{R})$ aussehen. Schreibe dazu hinreichend viele nicht-triviale Elemente hin.
2) Gib ein Beispiel einer konvergenten (aber nicht konstanten – das wäre zu

einfach) Folge in $l^2(\mathbb{R})$ an.
3) Gib in dem Banachraum $l^2(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt Φ eine beschränkte Folge an, die keine konvergente Teilfolge hat.

ÜBUNG [07]:

Finde zu einer Cauchyfolge $a_n \in l^2(\mathbb{R})$ einen Grenzwert $a \in \ \in l^2(\mathbb{R})$ und zeige, dass dieser auch in $l^2(\mathbb{R})$ liegt. Du brauchst die Konvergenz nicht zu zeigen.
Hinweis: Betrachte die Projekt π_k auf die k-ten Folgenglieder als Folge in $\mathbb{R}$.

Spektralsatz

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
  with(plots):
```

Der Spektralsatz

MATH: Ein Euklidischer Vektorraum (V, Ψ), wo V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum ist und

$$\Psi : V \times V \to \mathbb{R}$$

ein positiv definites Skalarprodukt, hat viele Endomorphismen, die in der einen oder anderen Weise auf das Skalarprodukt abgestimmt sind. An erster Stelle seien die Orthogonalprojektionen genannt. Eine Verallgemeinerung davon sind die selbstadjungierten Endomorphismen. Wir beginnen mit den einfachsten Fällen.

MATH: Eine Projektion von V ist gerade ein Endomorphismus π von V mit $\pi^2 = \pi$. In diesem Fall zerlegt sich V als direkte Summe von $Kern(\pi)$ und $Bild(\pi) = Kern(Id_V - \pi)$. Umgekehrt liefert jede Zerlegung von V in eine direkte Summe von zwei Teilräumen ein Paar von Projektionen π_1 und π_2, die die Teilräume als Bilder oder Kerne reproduzieren. Wichtig ist, dass man tatsächlich beide Teilräume braucht, um die Projektionen festzulegen.

MATH: Das Komplement (bezüglich der direkten Summe) eines Teilraumes ist i. A. nicht eindeutig gegeben. Man konnte aber das Skalarprodukt des euklidischen Vektorraumes benutzen, um ein eindeutiges Komplement zu erhalten. Man verlangt bei einer **Orthogonalprojektion** zusätzlich zu der Projektionseigenschaft, dass die Vektoren aus Kern und Bild senkrecht

aufeinander stehen, also Skalarprodukt Null haben. Vorstellungsmäßig erreicht man dies am einfachsten dadurch, dass man eine Orthonormalbasis B des Bildes, also des Teilraumes, auf den man projizieren will, zu einer Orthonormalbasis des ganzen Raumes C ergänzt, und die neuen Basisvektoren zu einer Orthonormalbasis D des Kernes wählt, also des Teilraumes, entlang dessen man projiziert.
Ist B eine Orthonormalbasis von V und $(B_1,.., B_k)$ eine Basis des Teilraumes W, so wird die Orthogonalprojektion von V auf W bezüglich B durch die Diagonalmatrix $Diag([1,.., 1, 0,.., 0])$ beschrieben, wo wir k Einsen und $n-k$ Nullen haben.

MATH: In einem Euklidischen Vektorraum (V, Ψ) definiere für den Endomorphismus α die **Adjungierte** α^{ad} über:

$$\Psi\left(\alpha^{ad}(v), w\right) = \Psi(v, \alpha(w))$$

für alle $v, w \in V$.

MATH: Die Matrix T einer Basistransformation von einer Orthonormalbasis in eine andere ist orthogonal, d. h. $T^{tr}.T = I$, also ist die Transponierte gleich der Inversen.

MATH: Als Folgerung erhalten wir, dass die Matrix M einer Orthonormalprojektion π bezüglich irgendeiner Orthonormalbasis immer symmetrisch ist: $M = T^{-1}Diag([1,.., 1, 0,..0])T = T^{tr}Diag([1,.., 1, 0,..0])T = M^{tr}$.
Was wir jetzt in Matrizen nachgerechnet haben, bedeutet für die lineare Abbildung, dass π selbstadjungiert ist, also gleich seiner Adjungierten π^{ad}.
Umgekehrt sind selbstadjungierte Projektionen Orthogonalprojektionen.

MATH (Spektralsatz): Sei (V, Ψ) ein euklidischer Vektorraum und α ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α.
Matrixversion: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so existiert eine orthogonale Matrix $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $g^{tr} \cdot A \cdot g = g^{-1} \cdot A \cdot g$ diagonal.

Selbstadjungierte Endomorphismen α unseres Euklidischen Vektorraumes (V, Ψ), besitzen also ein vielfachheitenfreies (**DENKANSTOSS:** Warum?) Minimalpolynom, welches über = in Linearfaktoren zerfällt (**DENKANSTOSS:** Warum?); sagen wir

$$\mu(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i) \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}.$$

Setzt man in ein Polynom eine symmetrische Matrix ein, bekommt man wieder eine symmetrische Matrix. Insbesondere sind die Projektionen auf Eigenräume, die man als solche Matrixpolynome bekommt, selbstadjungiert, also Orthogonalprojektionen. Wählt man in den Eigenräumen ON-Basen, hat man eine ON-Basis aus Eigenvektoren.

ÜBUNG [08]:

1) Führe die gerade diskutierte Zerlegung am Beispiel der folgenden Matrix A durch, d.h. bestimme die Projektionen auf die Eigenräume.
(Hierbei wollen wir die Matrix A als Matrix eines (nicht näher spezifizierten) Endomorphismus bezüglich einer (nicht näher spezifizierten) ONBasis auffassen.)
2) Warum sind diese Projektionen durch symmetrische Matrizen gegeben?
3) Bestimme eine ON-Basis aus Eigenvektoren von A

```
> A:=Matrix(4,4,(i,j)->1)+1;
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

Der Spaktralsatz hat viele Anwendungen. Wir wollen ein Beispiel betrachten.

Spektralsatz und Kegelschnitte

Der Spektralsatz hat noch eine wichtige Konsequenz, die man benutzen kann, um die Diskussion gewisser geometrischer Gebilde zu führen.

MATH: Sei $p = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ein quadratisches und homogenes Polynom in den n Variablen $x_1,.., x_n$, so gibt es eine orthogonale Variablensubstitution $y_i = \sum_{i,\,j=1}^{n} T_{ij} \cdot x_j$, so dass das transformierte Polynom als $\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot y_i^2$ geschrieben werden kann mit (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmten reellen Zahlen $r_1,..., r_n$. Orthogonal heißt hierbei, dass die Matrix T orthogonal ist.
Zum Beweis mache man sich klar, dass man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen kann, also eine symmetrische Koeffizientenmatrix. Deren Spektralzerlegung liefert das gewünschte Ergebnis.

Beispiel: Symmetrische Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$

```
> A := Matrix(2,2,[[17/50,3/25],[3/25,41/100]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{17}{50} & \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{41}{100} \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

und reelle homogene Polynome von Grad 2 in n Unbekannten stehen in Bijektion zueinander:

DENKANSTOSS: Gib die Bijektion und ihre Inverse an.

```
> p:=expand(Transpose(Vector(i->x[i],1..2)).A.Vector(i->x[i],
  1..2));
```

$$p := \frac{17}{50}\, x_1^2 + \frac{6}{25}\, x_1\, x_2 + \frac{41}{100}\, x_2^2 \tag{3.2.2}$$

Nach dem Spektralsatz kann man eine symmetrische Matrix durch einen orthogonalen Basiswechsel diagonalisieren:

```
> E:=Eigenvectors(A):
  if E[1][1]<E[1][2] then # wir wollen eine bestimmte
  Reihenfolge der Eigenwerte
    T:=E[2]:
  else
    T:=SubMatrix(E[2],1..2,[2,1]):
  fi:
  T:=evala(T.DiagonalMatrix(simplify(map(i->sqrt(evala
  (Transpose(T).T)[i,i]),[$1..2])))^(-1));
```

$$T := \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

```
> evala(T^(-1).A.T);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

```
> evala(Transpose(T).T); # T ist wirklich orthogonal
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

Man kann den selben Basiswechsel auf das Polynom anwenden. (**DENKANSTOSS**: Dies ist nichts anderes als ein Koordinatenwechsel.) Dies liefert ein Polynom ohne gemischte Terme:

```
> l:=evala(simplify(solve(convert(Vector(i->y[i],1..2)-T^(-1).
  Vector(i->x[i],1..2),list),[x[1],x[2]])[1])):
  q:=collect(simplify(expand(subs(l,p))),[y[1],y[2]],evala);
```

$$q := \frac{1}{2}\, y_2^2 + \frac{1}{4}\, y_1^2 \tag{3.2.6}$$

Warum ist eine Transformation von Polynomen auf solche eine Form interessant? Wir haben einen besseren Überblick. Wir schauen uns dies am Beispiel von Ellipsen an.

MATH: Eine **Ellipse** ist der geometrische Ort aller Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, deren

Abstandssumme von zwei festen Punkten $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^2$ einen festen Wert k hat. Diese beiden Punkte nennt man **Brennpunkte**.

Behauptung: Betrachten wir nun von obigem q die Faser $q^{-1}(\{1\})$, so ist dies eine Ellipse mit den beiden Brennpunkten

```
> B1:=Vector([sqrt(2),0]);
  B2:=Vector([-sqrt(2),0]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.7)}$$

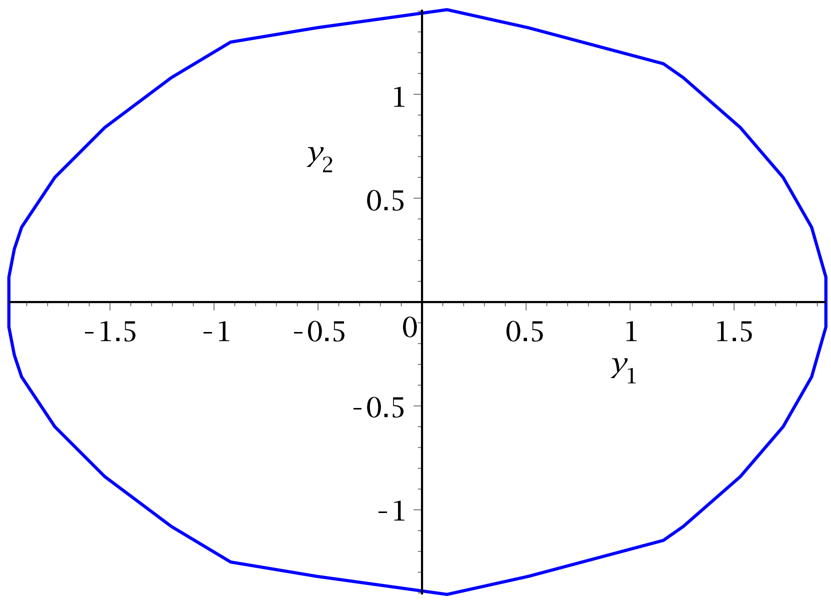
und dem Wert

```
> k:=4;
```

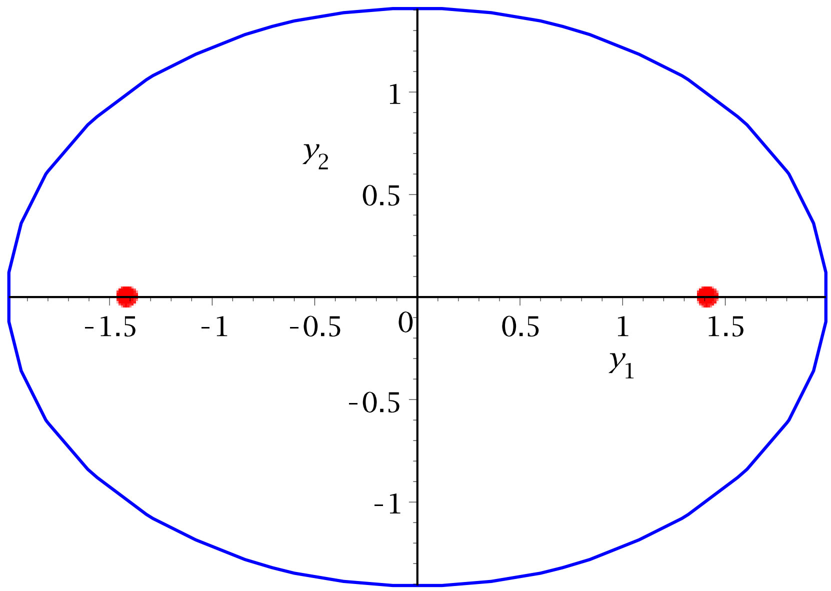
$$k := 4 \quad \textbf{(3.2.8)}$$

Wir zeichnen die Faser der 1 und es scheint sich wirklich um eine Ellipse zu handeln.

```
> with(plots):
  implicitplot(q-1,y[1]=-3..23,y[2]=-3..3,color=blue,scaling=
  constrained);
```




```
> ell:=implicitplot(q-1,y[1]=-3..3,y[2]=-3..3,color=blue,
  scaling=constrained):
  brp:=pointplot(map(convert,[B1,B2],list),color=red,symbol =
  solidcircle,symbolsize=20):
  display(ell,brp);
```



Wir betrachen als ersten Test zwei Punkte der Faser der 1.

```
> v1:=Vector([sqrt(2),1]);
  'q(v1)'=subs(map(i->y[i]=v1[i],[1,2]),q);
  'Abstandssumme'=sqrt(BilinearForm(v1-B1,v1-B1,conjugate=
  false)) + sqrt(BilinearForm(v1-B2,v1-B2,conjugate=false));
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q(v1) = 1$$

$$Abstandssumme = 4 \quad \textbf{(3.2.9)}$$

```
> v2:=Vector([5/4,(1/8)*sqrt(78)]);
  'q(v2)'=subs(map(i->y[i]=v2[i],[1,2]),q);
  'Abstandssumme'=sqrt(BilinearForm(v2-B1,v2-B1,conjugate=
  false)) + sqrt(BilinearForm(v2-B2,v2-B2,conjugate=false));
  simplify(%);
```

$$v2 := \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{8}\sqrt{78} \end{bmatrix}$$

$$q(v2) = 1$$

$$Abstandssumme = \frac{1}{8}\sqrt{78 + 64\left(\frac{5}{4} - \sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{8}\sqrt{78 + 64\left(\frac{5}{4} + \sqrt{2}\right)^2}$$

$$Abstandssumme = 4 \qquad \textbf{(3.2.10)}$$

Dieses erste Experimentieren stärkt unsere Vermutung, dass die Fasern Ellipsen sind. Wir wollen sie nun beweisen.
Sei dafür w ein beliebiger Punkt der Faser/Ellipse.

```
> solve(subs(y[1]=x,q)=1,y[2]);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2x^2+8},\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2x^2+8} \qquad \textbf{(3.2.11)}$$

Wir können also beliebige Werte für x aus dem Intervall $[-2, 2]$ wählen.
(**DENKANSTOSS**: Warum?)

```
> w:=Vector(2,[x,(1/2)*sqrt(-2*x^2+8)]);
  'q(w)'=subs(map(i->y[i]=w[i],[1,2]),q);
  ws:=Vector(2,[x,-(1/2)*sqrt(-2*x^2+8)]);
  'q(ws)'=subs(map(i->y[i]=ws[i],[1,2]),q);
```

$$w := \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}\sqrt{-2x^2+8} \end{bmatrix}$$

$$q(w) = 1$$

$$ws := \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2x^2+8} \end{bmatrix}$$

$$q(ws) = 1 \qquad \textbf{(3.2.12)}$$

Wir betrachten die Formel, welche die Summe der Abstände ausrechnet. Wir betrachten nur **w**, da das Vorzeichen durch Quadrieren verschwindet.

```
> sqrt(BilinearForm(w-B1,w-B1,conjugate=false)) + sqrt
  (BilinearForm(w-B2,w-B2,conjugate=false))=4;
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x-\sqrt{2}\right)^2 - 2x^2 + 8} + \frac{1}{2}\sqrt{4\left(x+\sqrt{2}\right)^2 - 2x^2 + 8} = 4 \qquad \textbf{(3.2.13)}$$

Wir stellen etwas um:

```
> sqrt(BilinearForm(w-B2,w-B2,conjugate=false))=4- sqrt
  (BilinearForm(w-B1,w-B1,conjugate=false));
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x+\sqrt{2}\right)^2-2x^2+8}=4-\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x-\sqrt{2}\right)^2-2x^2+8} \qquad \textbf{(3.2.14)}$$

Nun dürfen wir beide Seiten quadrieren, da die Wurzeln beide positiv sind (Abstände) und damit auch beide Seiten positiv sind.

```
> sqrt(BilinearForm(w-B2,w-B2,conjugate=false))^2=(4- sqrt
  (BilinearForm(w-B1,w-B1,conjugate=false)))^2;
  simplify(expand(%));
```

$$\left(x+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}x^2+2=\left(4-\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x-\sqrt{2}\right)^2-2x^2+8}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}x^2+2x\sqrt{2}+4=20-4\sqrt{16-8x\sqrt{2}+2x^2}-2x\sqrt{2}+\frac{1}{2}x^2 \qquad \textbf{(3.2.15)}$$

Wir müssen Maple beim Vereinfachen der Gleichung unter die Arme greifen:

```
> sqrt(16-8*x*sqrt(2)+2*x^2)=4-x*sqrt(2);
```

$$\sqrt{16-8x\sqrt{2}+2x^2}=4-x\sqrt{2} \qquad \textbf{(3.2.16)}$$

Abermals dürfen wir quadrieren, da x aus dem Intervall $[-2, 2]$ war.

```
> sqrt(16-8*x*sqrt(2)+2*x^2)^2=(4-x*sqrt(2))^2;
```

$$16-8x\sqrt{2}+2x^2=\left(4-x\sqrt{2}\right)^2 \qquad \textbf{(3.2.17)}$$

```
> expand(%);
```

$$16-8x\sqrt{2}+2x^2=16-8x\sqrt{2}+2x^2 \qquad \textbf{(3.2.18)}$$

Nun erkennen wir die wahre Aussage $0=0$ und damit folgt unsere Behauptung.

ÜBUNG [09]:

1) Folgere mit Hilfe der obigen Rechnungen, dass $p^{-1}(\{1\})$ ebenfalls eine Ellipse ist, wobei p das Polynom war, welches wir in q transformiert hatten. Hinweis: Wie muss man ein Element aus der Faser von q transformieren, um eines aus der Faser von p zu erhalten?
2) Bestimme die beiden Brennpunkte und den Wert k der Ellipse $p^{-1}(\{1\})$.
3) Plotte die beiden Ellipsen in ein gemeinsames Bild.

MATH: Eine Ellipse lässt sich immer auf die folgende Form bringen, wobei $a \geq b > 0$ ist:

```
> q_ellipse:=(y[1]/a)^2+(y[2]/b)^2;
```

$$q\_ellipse := \frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2} \qquad \textbf{(3.2.19)}$$

Dies wird im nächsten Semester bei den affinen Quadriken behandelt werden.

ÜBUNG [10s]:

Zeige, dass die beiden Punkte **C1, C2** die Brennpunkte einer Ellipse in der

Gestalt **q_ellipse** sind und dass die Abstandssumme k gleich $2 \cdot a$ ist.

```
C1:=Vector([sqrt(a^2-b^2),0]);
C2:=Vector([-sqrt(a^2-b^2),0]);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 - b^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C2 := \begin{bmatrix} -\sqrt{a^2 - b^2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

Hinweis: Mache dir klar, wann und warum du quadrieren darfst.

PROJEKT: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandsdifferenzbetrag von zwei festen Punkten einen festen Wert hat. Man kann jede Hyperbel auf die Gestalt $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$ mit $0 < b \leq a$ bringen. Diskutiere die Hyperbel analog zur Ellipse.