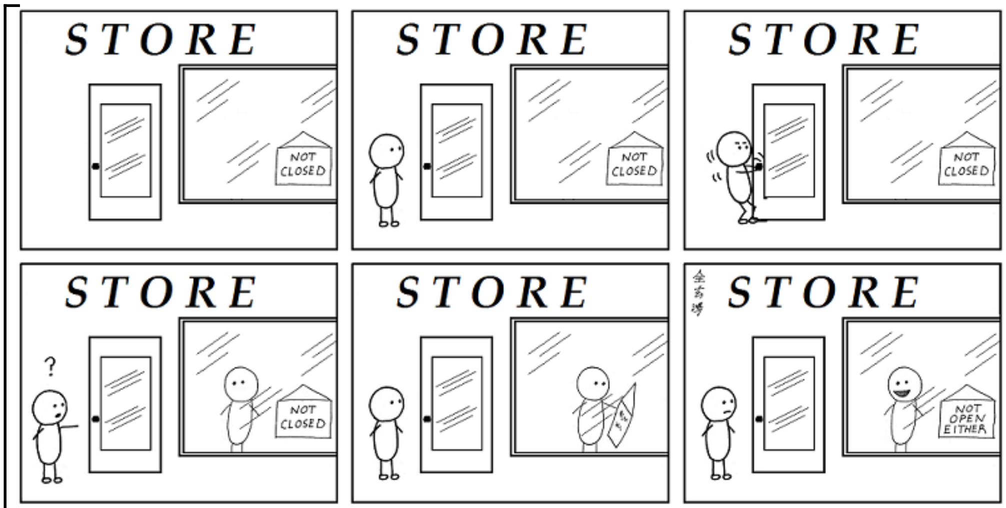
Topologie

Aufgaben: 4

```
> restart;
```

Offene und abgeschlossene Mengen



Scumbag topologist 'opens' a store.

MATH: Durch die Norm eines normierten Vektorraumes V hat man eine Vorstellung von der Nähe zweier Punkte. Mengen, die mit jedem ihrer Punkte p alle Punkte von V, die sehr nahe bei p liegen, enthalten, heißen offen. Genauer:

$M \subseteq V$ heißt **offen**, falls

$$\forall\ p \in M\ \ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(p) > 0:\ \ B(p, \varepsilon) := \{q \in V \mid \|p - q\| < \varepsilon\} \subseteq M.$$

Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossene Mengen**.

ÜBUNG [01]:
1) Gib ein Beispiel für eine Teilmenge eines mindestens zwei-dimensionalen normierten Vektorraumes, die weder offen noch geschlossen ist. 2) Zeige: Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. 3) Gib ein Beispiel dafür, dass die Vereinung beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein muss. 4) Zeige: Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. 5) Gib ein Beispiel dafür, dass der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen nicht offen sein muss. 6) Zeige: Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Konvergente Folgen in topologischen Räumen

MATH: Allgemein definiert man einen **topologischen Raum** als eine Menge *M* zusammen mit einer Teilmenge $O \subseteq Pot(M)$ der Potenzmenge von *M*, so dass (M, O) die folgenden Bedinungen erfüllt:
1) Die leere Menge und M gehören zu O:
$M, \varnothing \in \mathrm{O}$.
2) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus O liegt wieder in O:
$(\forall\ i \in I : \mathrm{O}_i \in \mathrm{O}\ ) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathrm{O}_i\ \in \mathrm{O}$
3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus O gehört zu O:
$(\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ i \in \{1,.., n\} : O_i \in \mathrm{O}\ ) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{O}_i\ \in \mathrm{O}$

Die Mengen aus O heißen **offen**, ihre Komplemente in *M* **abgeschlossen**.

DENKANSTOSS: Definiere einen topologischen Raum ausgehend von den abgeschlossenen Mengen und zeige die Äquivalenz der beiden Definitionen.

BEISPIEL: *M* sei eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes $(V, \|\ \|)$. Als Topologie auf *M* definieren wir die Menge der Durchschnitte von *M* mit den offenen Teilmengen von *V*.

BEISPIEL: Auf einer beliebigen Menge M gibt es zwei besonders einfache (aber wichtige) Topologien: die diskrete Topologie (d.h. jede Teilmenge von M ist offen) und die Klumpentopologie (nur M und $\varnothing$ sind offen).

MATH: Man kann den Konvergenzbegriff von Folgen allgemein für topologische Räume definieren:
Die Folge $i \mapsto v_i \in M$ heißt **konvergent** gegen $m \in M$, falls jede offene Menge, die m enthält (kurz **offene Umgebung** von *m*), auch v_i für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$ enthält.

ÜBUNG [02]:
Sei M eine Menge und $v \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge. 1) Sei M mit der Klumpentopologie versehen. Zeige, dass *v* konvergent gegen m ist für jedes $m \in M$. 2) Sei M mit der diskreten Topologie versehen. Was für Anforderungen muss v erfüllen, um konvergent gegen $m \in M$ zu sein? 3) Sei $a_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Diese habe bezüglich der üblichen Definition aus der Analysis I als Folge reeller Zahlen genau zwei Häufungspunkte $g, h \in \mathbb{Z}$ und sei beschränkt. Definiere durch Angabe der offenen Mengen oder durch Angabe der abgeschlossenen Mengen - bearbeite hierfür aber den obigen Denkanstoß! -

zwei Topologien $T_1, T_2 \subseteq Pot(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{Z}$ so, dass a_n in dem topoligischem Raum $(\mathbb{Z}, T_1)$ konvergiert (gegen einen beliebigen Grenzwert) und in dem Raum $(\mathbb{Z}, T_2)$ nicht konvergent ist und die Topologien maximal bzw. minimal mit der Eigenschaft sind. Beweise in beiden Fällen, dass die Folge konvergiert bzw. dies nicht tun kann.

MATH: Zwei äquivalente Normen induzieren die selben offenen (und damit abgeschlossenen) Mengen. (**DENKANSTOSS:** Warum?)

ÜBUNG [03]:

Betrachte $V := C([a, b], \mathbb{R})$, den Raum aller stetigen Funktionen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit den beiden Normen

$$\| \|_m : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \max(|f(x)|, x \in [a, b])$$

und

$$\| \|_i : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b |f(x)| dx.$$

1) Zeige, dass jede offene Menge im Sinne von $\| \|_i$ auch offen im Sinne von $\| \|_m$ ist.
2) Zeige, dass die Umkehrung nicht gilt, indem du eine Nullfolge im Sinne von $\| \|_i$ konstruierst, die aber keine Nullfolge im Sinne von $\| \|_m$ ist.
3) Visualisiere ein Stück dieser in 2) konstruierten Folge für den Fall $a=0, b=1$.
4) Folgere, dass $\| \|_m$ und $\| \|_i$ keine äquivalenten Normen sind.

Kompakte Mengen

MATH: Eine Verallgemeinerung endlicher Mengen stellen die kompakten Mengen dar:
Eine Teilmenge *M* eines normierten Raumes *V* heißt **kompakt,** falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. ist M in einer Vereinigung offener Mengen O_i enthalten, $i \in I$, für eine Indexmenge I, so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$M \subseteq \bigcup_{i \in J} \mathrm{O}_i .$$

Alternativ gibt es den Begiff der Folgenkompaktheit:
M heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge in *M* eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in *M* hat.

Für Teilmengen von Banachräumen fallen diese beiden Begriffe zusammen.
Im Falle endlicher Dimension gibt es eine weitere Charakterisierung (**Heine-Borel**): Kompakt ist äquivalent zu abgeschlossen und beschränkt.
Eine Teilmenge M eines normierten Raumes V heißt **beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft: $\forall\ m \in M$: $\|m\| \le s$.

ÜBUNG [04]:

Zeige: eine unbeschränkte Menge ist niemals folgenkompakt.

Diese Begriffe werden im Zusammenhang mit stetigen Abbildungen bedeutsam.

2.) Direkte Zerlegungen und Endomorphismen

Aufgaben: 5

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Wir wollen ein Kapitel aus dem letzten Semester wiederholen, damit die Resultate noch präsent sind, wenn wir sie bei der Jordannormalform benötigen.

Direkte Summen

MATH: Wir gehen aus von n Vektorräumen V_i, $i = 1, \ldots, n$ mit Endomorphismen

$$\varphi_i : V_i \to V_i$$

und setzen diese zusammen zu einem Endomorphismus φ der direkten Summe

$$V := V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

durch

$$\varphi : V \to V : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\varphi_1(v_1), \ldots, \varphi_n(v_n))$$

ÜBUNG [01]:

Sei in der obigen Situation $n := 3$ und

$$b \in V_1^2,\ c \in V_2^3,\ d \in V_3^4$$

Basen der V_i und die Endomorphismen bezüglich dieser Basen beschrieben durch

```
> BL_A1:=map(i->CompanionMatrix(x^i-x^(i-1)+2,x),[2,3,4]);;
```

(2.1.1)

$$BL\_A1 := \left[\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \quad \textbf{(2.1.1)}$$

Gib eine Basis der direkten Summe $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ an, so dass die Matrix des zusammengesetzten Endomorphismus die folgende, sich aufdrängende Gestalt

```
> A1:=DiagonalMatrix(BL_A1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.2)}$$

hat.

Invariante Teilräume

In diesem und den folgenden Abschnitten wird das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung bzw. einer Matrix erwähnt. Wenn du es noch nicht kennst, so kannst den Begriff getrost ignorieren und stattdessen ausschließlich mit dem Minimalpolynom arbeiten.

Das Ziel dieses Abschnittes soll es jedoch nicht sein, Vektorräume aus kleineren (d.h. solchen kleinerer Dimension) zusammenzusetzen, denn wie in der Aufgabe gesehen ist dies eine sehr simple Konstruktion. Statt dessen wollen wir einen gegebenen Vektorraum in kleinere Teilräume zerlegen. Dies soll allerdings nicht willkürlich erfolgen, sondern die Teilräume V_i sollen mit einem vorgegebenen Endomorphismus φ des Vektorraumes verträglich sein, d.h.

$$\varphi(V_i) \subseteq V_i.$$

Man spricht davon, dass V_i **invariant** unter φ ist.

Ein Vektorraum und ein φ, welche wie oben angegeben zusammengesetzt wurden, erfüllen diese Bedingung für die Zerlegung trivialerweise. Ein weiteres

wichtiges Beispiel ist die Zerlegung des Vektorraumes in Eigenräume zu dem gegebenen Endomorphismus; denn Eigenräume von φ sind offenbar invariant unter φ.
Im allgemeinen lassen sich für Endomorphismen aber keine Eigenvektorbasen angeben. Gesucht ist trotzdem eine Möglichkeit, möglichst kleine invariante Teilräume zu finden. Die sogenannten Haupträume sind ein erster Schritt in diese Richtung.
In die Sprache der Matrizen übersetzt heißt dies, dass eine Basis gesucht ist, unter der die Matrix möglichst diagonal ist (was auch immer das heißen mag). Als wichtigste Hilfsmittel hierfür stehen uns (weitestgehend äquivalent) das Minimalpolynom oder das charakteristische Polynom zur Verfügung.

MATH: Zu diesem Zweck brauchen wir eine strukturelle Idee, um an die Zerlegung zu kommen. Als Vorbereitung nochmals zurück zum obigen Fall: Die drei Räume, aus denen wir die direkte Summe gebildet haben, finden wir als Teilräume der direkten Summe wieder, nämlich als Bilder der folgenden drei Projektionen:

```
> DiagonalMatrix([IdentityMatrix(2),0*IdentityMatrix(3),0*
  IdentityMatrix(4)]),
  DiagonalMatrix([0*IdentityMatrix(2),IdentityMatrix(3),0*
  IdentityMatrix(4)]),
  DiagonalMatrix([0*IdentityMatrix(2),0*IdentityMatrix(3),
  IdentityMatrix(4)]);
```

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \tag{2.2.1}$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Wir halten fest, dass das Quadrat jedes dieser drei Endomorphismen (gegeben durch die Matrizen) wieder gleich dem Endomorphismus ist: Wir sprechen von idempotenten Endomorphismen oder Projektionen.

MATH: Wir erinnern uns: Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom

$x^2 - x$, d.h. $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Dann nennt man φ **Projektion** oder **idempotent**. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als

$$v = u + c$$

mit

$$u \in \mathrm{Kern}(\varphi) \text{ und } c \in \mathrm{Bild}(\varphi)$$

darstellen.

MATH: Die zweite Eigenschaft unserer drei Idemponente ist, dass das Produkt von je zwei verschiedenen Null ist, mit anderen Worten, das Bild eines jeden ist im Kern eines jeden anderen enthalten. Die dritte Eigenschaft ist diese: Die Summe aller drei Idempotente ist gleich der Identität. Wenn alle drei Eigenschaften erfüllt sind, spricht man von einer Zerlegung der Eins (oder der Identität) in orthogonale Idempotente (oder Projektionen).

ÜBUNG [02]:

Zeige: Ist $\pi \in \mathrm{End}(V)^k$ eine Zerlegung der Identität in k orthogonale Projektionen, so lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig als

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

mit

$$v_i \in \text{Bild } \pi_i$$

für $i = 1, \ldots, k$ schreiben.

Beispiel (schon vorher zerlegt)

```
> A1;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.1)}$$

BEISPIEL: Wir bleiben bei unserem obigen Beispiel und stellen uns die Aufgabe, die erste Projektion als Linearkombination der Potenzen von A darzustellen. Hier ist ein Fortschritt in diese Richtung:

```
> q1 := MinimalPolynomial(BL_A1[2],x)*MinimalPolynomial(BL_A1
  [3],x);
  q1 := CharacteristicPolynomial(BL_A1[2],x)*
  CharacteristicPolynomial(BL_A1[3],x);
```

$$q1 := (x^3 - x^2 + 2)\,(x^4 - x^3 + 2)$$

$$q1 := (x^3 - x^2 + 2)\,(x^4 - x^3 + 2) \quad \textbf{(2.3.2)}$$

Man beachte, dass die beiden Faktoren von $q1$ gerade die Minimalpolynome bzw. charakteristischen Polynome der hier nicht betrachteten Blöcke sind.

```
> #Dieses Programm setzt A in p ein
  Eins:=proc(p::polynom, A::Matrix)
   simplify(subs(x=A,expand(p)));
> end proc:
> Eins(q1,A1);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.3)}$$

```
> p1 := MinimalPolynomial(BL_A1[1],x);
```

```
p1 := CharacteristicPolynomial(BL_A1[1],x);
```

$$p1 := x^2 - x + 2$$

$$p1 := x^2 - x + 2 \quad \textbf{(2.3.4)}$$

```
> Eins(p1,A1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.3.5)}$$

Man beachte nun folgendes:

```
> MinimalPolynomial(A1,x);
  CharacteristicPolynomial(A1,x);
  expand(p1*q1);
```

$$x^9 - 3x^8 + 5x^7 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 4x + 8$$

$$x^9 - 3x^8 + 5x^7 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 4x + 8$$

$$x^9 - 3x^8 + 5x^7 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 4x + 8 \quad \textbf{(2.3.6)}$$

Wie man Eigenvektoren von φ zum Eigenwert λ gefunden hat, indem man $\mathrm{Kern}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ betrachtet hat, so kann man hier auch eine Basis des Teilraums (=Hauptraum) V_1 finden, indem man $\mathrm{Kern}(p_1(\varphi))$ betrachtet:

```
> NullSpace(Eins(p1,A1));
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \textbf{(2.3.7)}$$

Der Euklidische Algorithmus liefert uns einen Beweis (welcher hier nur am

Beispiel angedeutet wird), dass in $\mathrm{Kern}(p_1(\varphi))$ genau der passende Hauptraum enthalten ist. Weiter liefert uns der Euklidische Algorithmus eine Konstruktionsmöglichkeit für die Projektion in die gesuchten Haupträume:

```
> gcdex(p1,q1,x,'a1','b1');
```

$$1 \tag{2.3.8}$$

```
> a1;
  expand(a1*p1);
```

$$-\frac{3}{64}x^6+\frac{5}{64}x^5+\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{32}x^3-\frac{7}{32}x^2+\frac{3}{16}x+\frac{9}{16}$$

$$-\frac{3}{64}x^8+\frac{1}{8}x^7-\frac{7}{64}x^6-\frac{1}{16}x^5+\frac{1}{16}x^4+\frac{3}{32}x^3-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{16}x+\frac{9}{8} \tag{2.3.9}$$

```
> Eins(expand(a1*p1),A1);
```

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \tag{2.3.10}$$

```
> Eins(expand(b1*q1),A1);
```

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \tag{2.3.11}$$

Wir versuchen, dieses Wunder zu verstehen:

$$a_1 \cdot p_1 + b_1 \cdot q_1 = 1.$$

Wir multiplizieren mit $a_1 \cdot p_1$ und erhalten modulo $q_1 \cdot p_1$:

$$(a_1 \cdot p_1)^2 \equiv a_1 \cdot p_1 \ (\mathbf{mod}\ q_1 \cdot p_1)$$

Entsprechend

$$(b_1 \cdot q_1)^2 \equiv b_1 \cdot q_1 \ (\mathbf{mod}\ q_1 \cdot p_1)$$

und offenbar

$$(a_1 \cdot p_1) \cdot (b_1 \cdot q_1) \equiv 0 \ (\mathbf{mod}\ q_1 \cdot p_1).$$

Warum sind wir so scharf auf Kongruenzen modulo $q_1 \cdot p_1$? Hier ist die Antwort:

```
> Eins(expand(p1*q1), A1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

Da das Einsetzen der Matrix in $q_1 \cdot p_1$ die Nullmatrix ergibt, wollen dir das Produkt $q_1 \cdot p_1$ hier als Nullpolynom ansehen. Wir rechnen also modulo $q_1 \cdot p_1$.

Zusammenfassend bekommen wir nach dem Einsetzen der Matrix eine Zerlegung der Eins in orthogonale Idempotente.

ÜBUNG [03]:

1) Verstehe und Erkläre die Konstruktion der Projektionen auf die Invarianten Teilräume.
2) Führe die dem obigen Beispiel entsprechende Rechnung für

```
> p2:=MinimalPolynomial(BL_A1[2],x);
  q2:=MinimalPolynomial(BL_A1[1],x)*MinimalPolynomial(BL_A1[3],x);
```

$$p2 := x^3 - x^2 + 2$$

$$q2 := (x^2 - x + 2)\,(x^4 - x^3 + 2) \qquad \textbf{(2.3.13)}$$

```
> p2:=CharacteristicPolynomial(BL_A1[2],x);
  q2:=CharacteristicPolynomial(BL_A1[1],x)*
  CharacteristicPolynomial(BL_A1[3],x);
```

$$p2 := x^3 - x^2 + 2$$

$$q2 := (x^2 - x + 2)\,(x^4 - x^3 + 2) \qquad \textbf{(2.3.14)}$$

durch, d.h. konstruiere mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus eine Zerlegung der 1 in orthogonale Idempotente für die Teilräume $\mathrm{Kern}(p_2(A1))$ und $\mathrm{Kern}(q_2(A1))$.

3) Konstruiere eine Zerlegung der 1 in orthogonale Idempotente für die

Teilräume Kern$(p_3(A1))$ und Kern$(q_3(A1))$.

```
> p3:=MinimalPolynomial(BL_A1[3],x);
  q3:=MinimalPolynomial(BL_A1[1],x)*MinimalPolynomial(BL_A1
  [2],x);
```

$$p3 := x^4 - x^3 + 2$$

$$q3 := (x^2 - x + 2)\,(x^3 - x^2 + 2) \tag{2.3.15}$$

```
> p3:=CharacteristicPolynomial(BL_A1[3],x);
  q3:=CharacteristicPolynomial(BL_A1[1],x)*
  CharacteristicPolynomial(BL_A1[2],x);
```

$$p3 := x^4 - x^3 + 2$$

$$q3 := (x^2 - x + 2)\,(x^3 - x^2 + 2) \tag{2.3.16}$$

durch.

Beispiel (noch nicht zerlegt)

MATH: Es war wichtig, dass p_1, p_2, p_3 paarweise teilerfremd waren und das Produkt der p_i das Minimalpolynom (oder das charakteristische Polynom) unseres Endomorphismus teilt. Um einen Vektorraum zu zerlegen, geht man im Allgemeinen alle Teiler des Minimalpolynoms bzw. charakteristischen Polynoms durch und bestimmt für sie jeweils die Kerne. (Vorsicht: Falls im Minimalpolynom mehrfache Faktoren auftreten, ist die Situation etwas komplizierter, was dann zur Jordannormalform für Matrizen führen wird.) Wichtig war hingegen nicht, dass der Raum schon zerlegt war. Das Ziel soll es ja gerade sein, solch eine Zerlegung herzustellen, falls sie noch nicht gegeben ist. Hier ist nämlich ein Beispiel, wo der Raum noch nicht zerlegt ist:

```
> A2:=CompanionMatrix(p1*p2*p3,x);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

```
> P1:=Eins(expand(b1*q1),A2);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{17}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{23}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{17}{16} & \frac{11}{16} & -\frac{23}{16} & -\frac{45}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{17}{16} & \frac{11}{16} & -\frac{23}{16} \\ -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{17}{32} & -\frac{11}{32} & \frac{23}{32} & \frac{45}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{17}{16} & -\frac{11}{16} & \frac{23}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{17}{16} & -\frac{11}{16} \\ \frac{7}{64} & \frac{13}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{27}{64} & -\frac{25}{64} & \frac{29}{64} & \frac{79}{64} & \frac{21}{64} & -\frac{137}{64} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & \frac{17}{8} \\ \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{5}{64} & -\frac{7}{64} & \frac{3}{64} & \frac{17}{64} & \frac{11}{64} & -\frac{23}{64} & -\frac{45}{64} \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

```
> P1^2-P1;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

```
> Trace(P1);
```

$$2 \quad (2.4.4)$$

DENKANSTOSS: Warum ist die Dimension des Bildes gleich der Spur der Projektion?

```
> P2:=Eins(expand((1/8+(1/8)*x+(1/16)*x^2)*q2),A2);
```

$$P2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} & \frac{19}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} & \frac{25}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{13}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{21}{16} & -\frac{43}{16} & -\frac{53}{16} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} & \frac{13}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{13}{16} & -\frac{19}{16} & -\frac{13}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} \qquad (2.4.5)$$

```
> P2^2-P2;
  P1.P2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.4.6)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

> P3:=1-P1-P2;

$$P3 := \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{13}{8} & \frac{15}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{35}{8} & -\frac{65}{8} & -\frac{75}{8} \\ -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} & \frac{25}{16} & \frac{19}{16} & \frac{17}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{55}{16} \\ -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} & \frac{25}{16} & \frac{19}{16} & \frac{17}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & \frac{21}{32} & \frac{7}{32} & \frac{13}{32} & \frac{15}{32} & -\frac{27}{32} & -\frac{41}{32} \\ -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{11}{16} & -\frac{25}{16} & -\frac{51}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{11}{16} & -\frac{25}{16} \\ -\frac{11}{64} & -\frac{25}{64} & -\frac{51}{64} & -\frac{17}{64} & \frac{5}{64} & \frac{55}{64} & \frac{157}{64} & \frac{191}{64} & \frac{181}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{15}{8} & -\frac{21}{8} & -\frac{23}{8} \\ -\frac{7}{64} & -\frac{13}{64} & -\frac{15}{64} & -\frac{5}{64} & \frac{9}{64} & \frac{35}{64} & \frac{65}{64} & \frac{75}{64} & \frac{57}{64} \end{bmatrix} \tag{2.4.7}$$

> P3^2-P3,P1.P3,P2.P3;

(2.4.8)

$$\left[\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}\right], \tag{2.4.8}$$

$$\left[\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}\right]$$

Wählen wir also jetzt eine an die Bilder der Projektionen angepasste Basis, so erhalten wir eine Transformation auf eine Blockdiagonalgestalt:

```
> T := [ op(ColumnSpace(P1)), op(ColumnSpace(P2)), op
  (ColumnSpace(P3)) ];
```

(2.4.9)

$$T := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ -\frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ -\frac{15}{32} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right] \tag{2.4.9}$$

```
> T:=Matrix(T);
```

$$T := \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{32} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \tag{2.4.10}$$

```
> T^(-1).A2.T;
```

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \tag{2.4.11}$$

Wir bekommen dies noch schöner hin:

```
> T:=Matrix([Column(P1,1),A2.Column(P1,1),Column(P2,1),A2.
  Column(P2,1),A2.A2.Column(P2,1),Column(P3,1),A2.Column(P3,
  1),A2.A2.Column(P3,1),A2.A2.A2.Column(P3,1)]);
```

$$T := \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{13}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & \frac{21}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{7}{64} & \frac{13}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{11}{64} & -\frac{25}{64} & -\frac{51}{64} & -\frac{17}{64} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{7}{64} & -\frac{13}{64} & -\frac{15}{64} & -\frac{5}{64} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

```
> T^(-1).A2.T;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

Beispiel (mit Hilfe von Kernen)

Wir wollen obiges Beispiel noch einmal mit einem anderen Ansatz behandeln.

```
> A2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.5.1}$$

Wir setzen eine Basis aus den Kernen der Teiler des Minimalpolynoms bzw. charakteristischen Polynoms zusammen. Auf diese Art ist es leichter, an die Haupträume zu kommen, aber schwerer, an die Idempotente zu kommen.

```
> p1;
  p2;
  p3;
```

$$x^2 - x + 2$$
$$x^3 - x^2 + 2$$
$$x^4 - x^3 + 2 \tag{2.5.2}$$

```
> T1:=Matrix([ op(NullSpace(Eins(p1,A2))), op(NullSpace(Eins
  (p2,A2))), op(NullSpace(Eins(p3,A2))) ]);
```

$$T1 := \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & 8 & 4 & -16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -2 & 12 & 6 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -12 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 9 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.3}$$

```
> T1^(-1).A2.T1;
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.5.4}$$

Die Idempotente (man vergleiche mit oben, es sollten die selben sein) erhalten wir nun durch einen Basiswechsel:

```
> T1.DiagonalMatrix([1$2,0$3,0$4]).T1^(-1);
  Equal(%,P1);
  T1.DiagonalMatrix([0$2,1$3,0$4]).T1^(-1);
  Equal(%,P2);
  T1.DiagonalMatrix([0$2,0$3,1$4]).T1^(-1);
  Equal(%,P3);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{17}{8} & -\frac{11}{8} & \frac{23}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{17}{16} & \frac{11}{16} & -\frac{23}{16} & -\frac{45}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{17}{16} & \frac{11}{16} & -\frac{23}{16} \\ -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{7}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{17}{32} & -\frac{11}{32} & \frac{23}{32} & \frac{45}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{17}{16} & -\frac{11}{16} & \frac{23}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{17}{16} & -\frac{11}{16} \\ \frac{7}{64} & \frac{13}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{27}{64} & -\frac{25}{64} & \frac{29}{64} & \frac{79}{64} & \frac{21}{64} & -\frac{137}{64} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & \frac{17}{8} \\ \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{5}{64} & -\frac{7}{64} & \frac{3}{64} & \frac{17}{64} & \frac{11}{64} & -\frac{23}{64} & -\frac{45}{64} \end{bmatrix}$$

true

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} & \frac{19}{2} & \frac{13}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} & \frac{25}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{13}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{21}{16} & -\frac{43}{16} & -\frac{53}{16} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} & \frac{13}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{13}{16} & -\frac{19}{16} & -\frac{13}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix}$$

true

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{13}{8} & \frac{15}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{35}{8} & -\frac{65}{8} & -\frac{75}{8} \\ -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} & \frac{25}{16} & \frac{19}{16} & \frac{17}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{55}{16} \\ -\frac{5}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} & \frac{25}{16} & \frac{19}{16} & \frac{17}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{32} & \frac{21}{32} & \frac{7}{32} & \frac{13}{32} & \frac{15}{32} & -\frac{27}{32} & -\frac{41}{32} \\ -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{11}{16} & -\frac{25}{16} & -\frac{51}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{11}{16} & -\frac{25}{16} \\ -\frac{11}{64} & -\frac{25}{64} & -\frac{51}{64} & -\frac{17}{64} & \frac{5}{64} & \frac{55}{64} & \frac{157}{64} & \frac{191}{64} & \frac{181}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{15}{8} & -\frac{21}{8} & -\frac{23}{8} \\ -\frac{7}{64} & -\frac{13}{64} & -\frac{15}{64} & -\frac{5}{64} & \frac{9}{64} & \frac{35}{64} & \frac{65}{64} & \frac{75}{64} & \frac{57}{64} \end{bmatrix}$$

true **(2.5.5)**

Wir haben schon die gewünschten Blöcke erhalten. Wir wollen die Blöcke jedoch auf die Form von Begleitmatrizen bringen, das heißt für jeden Block soll ein Basisvektor Bild des vorangegangenen Basisvektors sein:

```
> NullSpace(Eins(p1,A2)),NullSpace(Eins(p2,A2)),NullSpace(Eins(p3,A2));
```

$$\left\{\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \quad \textbf{(2.5.6)}$$

```
> v1:=<4,0,-2,0,2,1,-2,1,0>:
  v2:=<4,-2,2,-2,3,-2,1,0,0>:
  v3:=<4,-2,0,3,-2,1,0,0,0>:
```

```
> T2:=Matrix([v1,A2.v1,v2,A2.v2,(A2^2).v2,v3,A2.v3,(A2^2).v3,
  (A2^3).v3]);
```

$$T2 := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.7)}$$

```
> T2^(-1).A2.T2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5.8)}$$

Beachte: Da p_2 noch weiter zerfällt, wäre sogar eine noch feinere Zerlegung möglich:

```
> factor(p2);
```

$$(x+1)\left(x^2-2x+2\right) \quad \textbf{(2.5.9)}$$

Neues **Beispiel**:

```
> p:=product(x^i-4,i=1..4);
  A3:=CompanionMatrix(p);
```

$$p := (x-4)\left(x^2-4\right)\left(x^3-4\right)\left(x^4-4\right)$$

(2.5.10)

$$A3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -256 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.5.10)}$$

ÜBUNG [04]:

1) Verstehe und erkläre, wie die Methode zum Bestimmen von Idempotenten (und damit von Bases der Haupträume) aus dem letzten Teilabschnitt funktioniert.
2) Verstehe und erkläre, wie die Methode zum Bestimmen von von Bases der Haupträume aus diesem Teilabschnitt funktioniert.
3) Vergleiche diese beiden Methoden.
4) Gib eine Matrix T an, welche die Matrix $A3$ über dem Körper < der rationalen Zahlen mit Blöcken möglichst kleinen Grades auf Blockdiagonalgestalt konjugiert. (Hinweis: Der Befehl **factor** kann benutzt werden.)

Zusammenfassung

Wir halten zwei Tatsachen fest:

MATH: Eine Zerlegung eines Vektorraumes V in eine (innere) direkte Summe von Teilräumen V_i, $i = 1,\ldots, k$ ist durch eine Zerlegung der Identität Id_V in orthogonale Projektionen P_i mit

$$P_i(V) = V_i$$

gegeben.

MATH: Ist φ ein Endomorphimus des endlich dimensionalen Vektorraums V, so dass man eine Faktorisierung des Minimalpolynoms bzw. charakteristischen Polynoms $p(x)$ von φ in **paarweise teilerfremde** Polynome

$$p_i,\ i = 1,\ldots, k$$

hat, so bekommt man eine Zerlegung der Eins in **orthogonale Idempotente** P_i, die mit φ **vertauschbar** sind, also insbesondere

$$\varphi(\mathrm{Bild}(P_i)) \subseteq \mathrm{Bild}(P_i).$$

Die Einschränkung von φ auf $\mathrm{Bild}(P_i)$ hat das Minimalpolynom p_i für $i = 1, \ldots, k$.
Eine angepasste Basis, also die Basen der $\mathrm{Bild}(P_i)$ hintereinandergenommen, liefert eine Blockdiagonalmatrix für φ.

DENKANSTOSS: Was kann man noch genauer sagen, wenn die p_i alle vom Grad 1 sind?

Wir haben bisher aus Minimalpolynom und charakteristischem Polynom die selben Eigenschaften rausholen können. Im Fall der Jordannormalform von Endomorphismen zeigt sich, welche unterschiednlichen Informationen diese beiden Polynome beinhalten.

ÜBUNG [05]:

1) Gib eine Matrix *T* an, welche die Matrix **A4** über dem Körper < der rationalen Zahlen mit Blöcken möglichst kleinen Grades auf Blockdiagonalgestalt konjugiert.
2) Was verändert sich, wenn man die gleiche Rechnung über dem Körper C der komplexen Zahlen durchführt?

```
> A4:=CompanionMatrix((x^3-1)*(x^4-1),x);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.6.1)}$$