Gruppenhomomorphismen, S_n, Signum

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Symmetrische Gruppe

MATH: Abbildungen von algebraischen Strukturen, die das Rechnen übertragen heißen **Homomorphismen**. Wir nehmen Gruppen als algebraische Struktur und wollen einige wichtige Beispiele von Gruppenhomomorphismen kennenlernen.

Genauer: Seien G und H Gruppen. Ein **Gruppenhomomorphismus** ist eine Abbildung $f\colon (G,\cdot) \to (H,\bullet)$ für die gilt
$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

DENKANSTOSS: Hieraus folgt $f(1_G) = 1_H$, sowie $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Weiterhin ist ein Mono-, Epi- bzw. Isomorphismus ein injektiver, surjektiver bzw. bijektiver Homomorphismus.

Ist die Gruppe kommutativ, schreibt man häufig $+$ anstatt $\cdot$ für die Verknüpfung, man muss also aufpassen!

Ein Beispiel kennen wir schon: lineare Abbildungen. Schließlich sind Vektorräume Gruppen und lineare Abbildungen sind mit der Addition verträglich.

Die erste Gruppe, die wir behandeln, ist die Gruppe S_n aller bijektiven Abbildung von
$\{1, 2, \ldots, n\}$
in sich, genannt die **symmetrische Gruppe** auf n Symbolen. Die Elemente werden auch **Permutationen** von $\{1, 2, \ldots, n\}$ genannt.
Wir schreiben eine Permutation π als n-Tupel (Zweite-Zeile-Schreibweise)
$[\pi(1), \ldots, \pi(n)]$.
Hier ein Programm für das Produkt in dieser Datenstruktur:

```
> pro:=proc(a::list,b::list)
    if nops(a)<>nops(b) or {op(a)}<>{$1..nops(a)} or {op(b)}<>
  {$1..nops(a)} then
      error "Falsche eingabe";
    end if;
    return map(i->a[i],b);
  end proc:
> pro([2,1,3],[1,3,2]);
```

$$[2, 3, 1] \tag{1.1.1}$$

ÜBUNG [01]:

Schreibe ein Programm "inv" zum Invertieren einer Permutation

MATH: Offenbar bilden die invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K ebenfalls eine Gruppe, genannt **generelle lineare Gruppe** des Körpers K vom Grad n, bezeichnet mit $GL(n, K)$. Hier ist ein Gruppenhomomorphismus

$$P: S_n \to GL(n, K)$$

```
> P:=proc(a::list)
    if {op(a)}<>{$1..nops(a)} then
      error "Falsche Eingabe";
    end if;
    SubMatrix(IdentityMatrix(nops(a)),1..nops(a),a);
  end proc:
```

```
> P([2,1,3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

Ein kurzer Test (kein Beweis), ob es sich um einen Homomorphismus handelt.

```
> P([2,1,3]).P([3,2,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

```
> P(pro([2,1,3],[3,2,1]));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

Die Botschaft dieses Homomorphimus ist, dass es keinen großen Unterschied macht, ob man $\{1, 2, .., n\}$ oder die Standardbasisvektoren von $K^{n \times 1}$ permutiert.

Signum

MATH: Wir wollen einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{sign}: S_n \to \{\pm 1\},$$

das **Signum**, konstruieren, wobei $(\{\pm 1\}, \cdot)$ multiplikativ als Gruppe zu verstehen ist. sign soll nicht trivial sein in dem Sinne, dass er nicht alle Permutationen auf 1 abbilden soll.

Behauptung: Es gibt höchstens einen derartigen Homomorphismus sign.

Zum Beweis schauen wir uns die Transpositionen in S_n an, also Permutationen, die genau zwei Elemente i, j von $\{1, \ldots, n\}$ vertauschen und jedes andere Element auf sich abbilden. Bezeichnung: (i, j) (Zykelschreibweise).

1. Zwischenbehauptung: Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Dies ist klar für S_2. Angenommen es gilt für S_n. Dann gilt es auch für S_{n+1}, denn für π mit $\pi(n+1) = n+1$ können wir die Induktionsannahme direkt auf π anwenden und für π mit $\pi(n+1) \neq n+1$ auf $(n+1, \pi(n+1)) \circ \pi$.

Hier ein kurzes Programm, das eine Transposition erstellt:

```
> trans := (n, i, j) -> subs([i=j,j=i], [$1..n]):
> trans(4,2,3);
```

$$[1, 3, 2, 4] \tag{1.2.1}$$

ÜBUNG [02]:

Der Induktionsbeweis zeigt sogar, daß jedes $\pi \in S_n$ sich als Produkt von k Transpositionen schreiben läßt mit $k < n$. Schreibe die folgende Permutation als Produkt von ≤ 7 Transpositionen (Vorsicht bei der Reihenfolge):

```
> a:=[2,3,4,5,1,7,6,8];
```

$$a := [2, 3, 4, 5, 1, 7, 6, 8] \tag{1.2.2}$$

MATH:
Folgerung: Für mindestens eine Transposition muss sign den Wert -1 liefern. (**DENKANSTOSS: Warum?)**

2. Zwischenbehauptung: Sind α, ε Transpositionen in S_n, so exisitert ein $\pi \in S_n$ mit

$$\alpha = \pi \circ \varepsilon \circ \pi^{-1}.$$

Folgerung: $\operatorname{sign}(\alpha) = \operatorname{sign}(\varepsilon)$ (**DENKANSTOSS**: Warum?)

Sei $\varepsilon = (a, b)$ und $\alpha = (i, j)$, $a \neq b$, $i \neq j$. Wähle π so, dass $\pi(\mathrm{a}) = i$, $\pi(b) = j$, was auch leicht möglich ist (z.B., im Fall dass a, b, i, j paarweise verschieden sind, das Produkt der Transpositionen (a, i) und (b, j)).
Es gilt nämlich die Formel:

DENKANSTOSS: $\pi \circ (a, b) \circ \pi^{-1} = (\pi(a), \pi(b))$.

MATH: Insgesamt haben wir also gesehen, dass es höchstens einen (**DENKASTOSS**: Warum?) nicht-trivalen Homomorphismus sign: $S_n \to \{\pm 1\}$

gibt. Im Falle seiner Existenz nimmt dieser auf den Transpositionen den Wert -1 an, auf den Produkten von 2 Transpositionen den Wert +1 und auf den Produkten von k Transpositionen den Wert $(-1)^k$.

MATH: sign: $S_n \to \{\pm 1\}$ existiert und ist gegeben durch

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Wir wollen die Homomorphieeigenschaft nicht nachweisen. Sie basiert auf

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\pi(i)} - x_{\pi(j)}}{x_i - x_j}$$

wo die x_i beliebige n verschiedene Zahlen (oder Unbestimmte) sind.

ÜBUNG [03]:

Zeige: Die Permutation b kann nicht als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden:

```
> b:=[5,4,3,2,1,9,8,7,6];
```

$$b := [5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6] \quad \textbf{(1.2.3)}$$

MATH: $P: S_n \to GL(n, K)$ von ganz oben war ein injektiver Homomorphismus. Sein Bild besteht aus den $n!$ Permutationsmatrizen vom Grad n, die dann natürlich auch eine Gruppe bilden (**DENKANSTOSS:** Warum?). Die **Determinante** einer Permutationsmatrix $P(a)$ kann man jetzt als das Signum von $a \in S_n$ definieren.

```
> Determinant(P(b));
```

$$1 \quad \textbf{(1.2.4)}$$

Determinante (Eindeutigkeit)

Aufgaben: 2

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Eigenschaften

MATH: Die **Determinante** ist eine Abbildung

$\operatorname{Det}: K^{n \times n} \to K$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1) Ist $U \in K^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix, d. h.

$U_{ij} = 0$ für $i < j$,

so gilt

$$\mathrm{Det}(U) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}.$$

(**Normierung**)

2) Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt

$$\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$$

(**Homomorphieeigenschaft**)

Dies ist zwar nicht der gewöhnliche Weg, Determinanten einzuführen, aber für uns im Augenblick der schnellste und anschaulichste. Wir gehen so vor, dass wir zuerst zeigen, dass die Forderungen 1.) und 2.) zu maximal einer Funktion Det führen (Eindeutigkeit). Natürlich hängt die Funktion auch von n ab, so dass wir besser Det_n gesagt hätten.

DENKANSTOSS: Falls Det existiert, folgt leicht

$$\mathrm{Det}(I_n) = 1,$$

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = (\mathrm{Det}(A))^{-1}$$

und

$$GL(n, K) \rightarrow K^* : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Det}(A)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, wo mit

$$K^* = (K - \{0\}, \cdot)$$

die multiplikative Gruppe des Körpers ist.

BEISPIELE:

```
> U:=Matrix(4,4,(i,j)->if i<j then 0 else u[i,j] end if);
```

$$U := \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & 0 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & 0 \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

```
> Determinant(U);
```

$$u_{1,1}\, u_{2,2}\, u_{3,3}\, u_{4,4} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

```
> U:=Matrix(4)+1:
  U:=SubMatrix(U,1..4,[2,1,3,4]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

```
> Determinant(U);
```

$$-1 \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Dies kann man leicht einsehen, denn es gibt eine invertierbare Matrix

```
> T:=DiagonalMatrix([Matrix([[1,1],
```

```
[0,1]]),1,1]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

mit

```
> T^(-1).U.T;
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

Also folgt

$$\mathrm{Det}(U) = \mathrm{Det}(T)^{-1} \cdot \mathrm{Det}(U) \cdot \mathrm{Det}(T) = \mathrm{Det}\left(T^{-1} U T\right) = -1$$

ÜBUNG [04]:

1) Zeige, dass eine Permutationsmatrix $U = P((i, j)) \in GL(n, K)$ einer beliebigen Transposition $(i, j) \in S_n$ immer $\mathrm{Det}(U) = -1$ erfüllt.

(Hinweis: Benutze den Homomorphismus P aus Abschnitt "Gruppenhomomorphismen, S_n, Signum". Reduziere zuerst auf den Fall $(i, j) = (1, 2)$. Wende dann die gerade vorgeführte Idee mit den Blockdiagonalmatrizen an (Matrix T oben).)

2) Folgere $\forall\, \pi \in S_n : \mathrm{Det}(P(\pi)) = \mathrm{sign}(\pi)$.

Berechnung der Determinante

MATH: Wenn eine Determinante existiert (im Sinne der Forderungen 1.), 2.)), dann ist sie eindeutig bestimmt und kann mit dem Gaußschen Algorithmus ausgerechnet werden, denn

a) die Determinante von unteren wie oberen Dreiecksmatrizen ist gleich dem Produkt der Diagonaleinträge,

b) der Gaußalgorithmus faktorisiert eine gegebene Matrix in ein Produkt von unteren und oberen Dreiecksmatrizen sowie einer Permutationsmatrix. (Dies hast du in der Vorlesung unter dem Namen LU-Zerlegung (bzw. LR-Zerlegung) kennengelernt.)

ad a):

```
> U:=Matrix(4,4,(i,j)->if i>j then 0 else u[i,j] end if);
```

$$U := \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

```
> T:=SubMatrix(IdentityMatrix(4),1..4,[4,3,2,1]);T.T;
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

```
> T^(-1).U.T;
```

$$\begin{bmatrix} u_{4,4} & 0 & 0 & 0 \\ u_{3,4} & u_{3,3} & 0 & 0 \\ u_{2,4} & u_{2,3} & u_{2,2} & 0 \\ u_{1,4} & u_{1,3} & u_{1,2} & u_{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

ad b)
Wir behandeln die folgende Matrix repräsentativ (dies ist kein Beweis):

```
> A:=<<0,1,2,3>|<1,-1,0,1>|<2,1,1,1>|<0,2,1,-1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

Das Ziel ist es nun, diese Matrix in einer Art Gauß-Algorithmus zuerst als Summe von Matrizen vom Rang 1 darzustellen und aus diesen dann die 3 Faktoren zu erhalten.
Eigentlich würde man nun zunächst die erste Zeile und erste Spalte durch Subtraktion einer Matrix vom Rang 1 zu 0 machen. Dies ist aber nicht möglich, da $A_{11} = 0$ ist. Also nehmen wir uns die erste Spalte und zweite Zeile her.
(Eigentlich ist die Reihenfolge, in der man mit dem Ausräumen vorgeht, relativ egal. Aber der Übersicht wegen versucht man von links und von oben damit

anzufangen, *A* auszuräumen.)
Diese 0 wird später dafür sorgen, dass eine Permutationsmatrix eingefügt werden muss.

```
> Z1:=1/A[2,1]*SubMatrix(A,2..2,1..4);S1:=SubMatrix(A,1..4,1..1);
```

$$Z1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

```
> A1:=A-S1.Z1;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

Der hier auftretende Faktor $\frac{1}{A_{2,1}}$ ist der Grund, dass $A_{11} = 0$ ausschließt, dass man zuerst die erste Zeile und erste Spalte auszuräumen kann.
Räume nun die erste Zeile und zweite Spalte aus:

```
> Z2:=1/A1[1,2]*SubMatrix(A1,1..1,1..4);
  S2:=SubMatrix(A1,1..4,2..2);
  A2:=A1-S2.Z2;
```

$$Z2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

Zum Schluss noch die dritte Zeile und dritte Spalte …

```
> Z3:=1/A2[3,3]*SubMatrix(A2,3..3,1..4);
  S3:=SubMatrix(A2,1..4,3..3);
  A3:=A2-S3.Z3;
```

$$Z3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$S3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.2.8)$$

... und den letzten Eintrag:

```
> Z4:=1/A3[4,4]*SubMatrix(A3,4..4,1..4);
  S4:=SubMatrix(A3,1..4,4..4);
  A4:=A3-S4.Z4;
```

$$Z4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.2.9)$$

Jetzt kann A als Summe dieser 4 Matrizen $S_i \cdot Z_i$ vom Rang 1 dargestellt werden:

```
> S1.Z1+S2.Z2+S3.Z3+S4.Z4;
  Equal(%,A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

true (2.2.10)

Nun kann man die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_4$ in eine Matrix B schreiben und die Spalten $S_1, \ldots, S_4$ in eine Matrix C. Das Produkt aus diesen Matrizen ist dann gerade wieder A:

```
> B:=<Z1,Z2,Z3,Z4>;
  C:=<S1|S2|S3|S4>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & -10 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.11)}$$

```
> Equal(C.B,A);
```

$$\mathit{true} \quad \textbf{(2.2.12)}$$

Wir haben das Ziel schon fast erreicht, denn *A* ist jetzt das Produkt einer Matrix *C* (welche einer unteren Dreicksmatrix nahe kommt) und einer oberen Dreiecksmatrix *B*. Man sieht aber, dass eine Permutation der ersten beiden Spalten von *C* eine obere Dreiecksmatrix ergibt. Dies resultiert genau daraus, dass wir oben nicht mit der ersten Zeile und ersten Spalte anfangen konnten.

```
> Q:=SubMatrix(IdentityMatrix(4),1..4,[2,1,3,4]);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.13)}$$

Q ist eine Permutationsmatrix, deren Heranmultiplizieren an A genau die Permutation der ersten beiden Spalten bewirkt. Man erhält:

$$C = C \cdot Q \cdot Q^{-1} = C_1 \cdot Q^{-1}$$

mit

```
> C1:=C.Q;
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -10 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.14)}$$

Zusammen erhält man:

$$A = C \cdot B = C_1 \cdot Q^{-1} \cdot B$$

Hierbei ist C_1 jetzt eine untere Dreiecksmatrix, *B* eine obere Dreicksmatrix und

Q^{-1} eine Permutationsmatrix. Da Q aber eine Transposition repräsentiert, gilt $Q^{-1} = Q$:

```
> Q^(-1),Q,Q.Q;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2.15)}$$

Also ist

$A = C_1 \cdot Q \cdot B$:

```
> C1.Q.B;
  Equal(%,A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

true **(2.2.16)**

Nun kann man ganz einfach die Determinante von *A* bestimmen. Denn:

$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(C_1) \cdot \mathrm{Det}(Q) \cdot \mathrm{Det}(B)$.

Hierbei ist $\mathrm{Det}(C_1)$ und $\mathrm{Det}(B)$ gerade das Produkt der Diagonaleinträge der Matrizen (da sie Dreiecksmatrizen sind) und $\mathrm{Det}(Q) = -1$, da Q eine Transposition darstellt.

```
> mul(C1[i,i],i=1..4)*(-1)*mul(B[i,i],i=1..4);
```

-5 **(2.2.17)**

Probe:

```
> Determinant(A);
```

-5 **(2.2.18)**

ÜBUNG [05]:

1) Führe die entsprechende Rechnung mit Hilfe des klassischen Gaußschen Algorithmus von Hand durch und gib so eine neue Berechnung der Determinante an.

(Hinweis: Stelle die Zeilenumformungen durch Permutationsmatrizen und Dreiecksmatrizen dar. Alternativ: Überlege was die Determinanten der verwendeten Umformungsmatrizen sind und rechne von Hand.)

2) Unter Benutzung des obigen Verfahrens mit Hilfe der Matrizen vom Rang 1 bestimme die Determinante von **M**

3) Wie zeigt dieses Verfahren, welchen Rang die Matrix hat?

```
> M:=Matrix([[ 1 , 2 , 3 , 4 ],
```

```
[ 2 , 3 , 4 , 5 ],
[ 7 , 6 , 5 , 4 ],
[ 10 , 11 , 12 , 13 ]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \qquad (2.2.19)$$

Determinante (Existenz)

Aufgaben 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Laplace-Entwicklung

MATH: Die Skizze des Eindeutigkeitsbeweises aus "Determinante (Eindeutigkeit)" hat den Nachteil, dass sie uns keine explizite Formel für die Determinante liefert, die man dann für den Existenzbeweis benutzen könnte, indem man die beiden Eigenschaften 1.) und 2.) mit Hilfe dieser Formel überprüft. Eine solche Formel wollen wir jetzt erarbeiten.

Wir wollen mit ein paar Vermutungen versuchen eine Formel für die Determinante zu entwickeln. Für diese Formel kann man dann zeigen, dass sie die (eindeutige) Determinante festlegt.

Wir vermuten, dass die Determinante eine Polynomfunktion der Matrixeinträge A_{ij} von $A \in K^{n \times n}$ ist.

Die Formel

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Diag}([1,\ldots, 1, s, 1,\ldots, 1]) \cdot A) = s \cdot \mathrm{Det}(A)$$

sagt uns, dass in jedem Summand des Polynoms ein Eintrag A_{ij} nur zur ersten Potenz vorkommen kann und dass wahrscheinlich keine zwei Faktoren A_{ij} mit demselben i in einem solchen Summanden auftauchen können.

Die Formel

$$\mathrm{Det}(s \cdot A) = s^n \cdot \mathrm{Det}(A)$$

legt nahe, dass die Summanden immer genau n Faktoren haben.

Man beachte nun, dass wir für monomiale Matrizen (d.h. Matrizen, die in jeder

Zeile und jeder Spalte nur einen Eintrag ungleich 0 besitzen) bereits eine Formel für die Determinante gefunden haben:

```
> sym:=proc(n::posint)
    local i, L;
    if n=1 then
      return [[1]];
    end if;
   L:=NULL;
    for i from 1 to n do
      L:=L,op(map(r->[op(r[1..i-1]),n,op(r[i..n-1])],sym(n-1))
  );
    end do;
    return [L];
  end proc:
> L4:=sym(4);
```

$$L4 := [[4, 3, 2, 1], [4, 3, 1, 2], [4, 2, 3, 1], [4, 1, 3, 2], [4, 2, 1, 3], [4, 1, 2, 3], [3, 4, 2, 1], [3, 4, 1, 2], [2, 4, 3, 1], [1, 4, 3, 2], [2, 4, 1, 3], [1, 4, 2, 3], [3, 2, 4, 1], [3, 1, 4, 2], [2, 3, 4, 1], [1, 3, 4, 2], [2, 1, 4, 3], [1, 2, 4, 3], [3, 2, 1, 4], [3, 1, 2, 4], [2, 3, 1, 4], [1, 3, 2, 4], [2, 1, 3, 4], [1, 2, 3, 4]] \quad (3.1.1)$$

```
> DD:=DiagonalMatrix([a,b,d,c]);
  SubMatrix(DD,1..4,L4[2]);
  Determinant(%);
```

$$DD := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-c\,d\,a\,b \quad (3.1.2)$$

DENKANSTOSS: Nutze die Methoden aus dem Abschnitt "Determinante (Eindeutigkeit)" um die obige Determinante auszurechnen.

Für jedes Elements aus **L4** muss ein Summand in der Determinantenformel vorkommen, also addieren wir sie alle auf:

```
> ex:=proc(A::Matrix,pi::list)
    local i,B;
   B:=Matrix(Dimension(A));
```

```
    for i from 1 to nops(pi) do
      B[i,pi[i]]:=A[i,pi[i]]
    end do;
    return B;
  end proc:
> A:=Matrix(4,4,symbol=a);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

```
> ex(A,L4[2]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

```
> dA:=add(Determinant(ex(A,L4[i])),i=1..nops(L4));
```

$$\begin{aligned} dA := {} & a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} - a_{1,1} a_{2,2} a_{3,4} a_{4,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} a_{4,4} \\ & + a_{1,1} a_{2,3} a_{3,4} a_{4,2} + a_{1,1} a_{2,4} a_{3,2} a_{4,3} - a_{1,1} a_{2,4} a_{3,3} a_{4,2} \\ & - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} a_{4,4} + a_{1,2} a_{2,1} a_{3,4} a_{4,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} a_{4,4} \\ & - a_{1,2} a_{2,3} a_{3,4} a_{4,1} - a_{1,2} a_{2,4} a_{3,1} a_{4,3} + a_{1,2} a_{2,4} a_{3,3} a_{4,1} \\ & + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} a_{4,4} - a_{1,3} a_{2,1} a_{3,4} a_{4,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} a_{4,4} \\ & + a_{1,3} a_{2,2} a_{3,4} a_{4,1} + a_{1,3} a_{2,4} a_{3,1} a_{4,2} - a_{1,3} a_{2,4} a_{3,2} a_{4,1} \\ & - a_{1,4} a_{2,1} a_{3,2} a_{4,3} + a_{1,4} a_{2,1} a_{3,3} a_{4,2} + a_{1,4} a_{2,2} a_{3,1} a_{4,3} \\ & - a_{1,4} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,1} - a_{1,4} a_{2,3} a_{3,1} a_{4,2} + a_{1,4} a_{2,3} a_{3,2} a_{4,1} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

```
> coeff(dA,a[4,4],1);
```

$$\begin{aligned} & a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} \\ & - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

ÜBUNG [06]:

1) Verstehe obige Überlegungen zur Formel der Determinante. Insbesondere: Welche Annahmen treffen wir? Was folgt aus diesen Annahmen?
2) Zeige, dass `coeff(dA,a[4,4],1)` gleich dem ist, was wir nach den obigen Überlegungen als Determinante von `SubMatrix(A,1..3,1..3)` erwarten würden.

MATH: Mit der obigen Entwicklungsformel können wir nun die Existenz der Determinanten zeigen, indem wir die definierenden Eigenschaften aus der Formel heraus nachrechnen.
Wir entdecken, dass unsere Formel für die Determinante eine faszinierende induktive Struktur hat: Der Koeffizient von $a_{i,j}$ ist bis aufs Vorzeichen gleich der Determinante derjenigen Teilmatrix von A, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

DENKANSTOSS: Verifiziere dies und überzeuge dich von dem schachbrettartigen Vorzeichenschema:

```
> Matrix(4,4,(i,j)->(-1)^(i+j));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

MATH: Folgerung (Laplace-Entwicklung): Wir haben eine induktive Formel für die Determinante, etwa durch Entwicklung nach der ersten Spalte, d.h. wir können die Determinante wie folgt zerlegen:

```
> Det(A) = add((-1)^(1+i)*a[i,1]*Det(SubMatrix(A,[seq(j,j=1..
  i-1),seq(j,j=i+1..4)],2..4)),i=1..4);
```

$$\begin{aligned} Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) &= a_{1,1}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) \\ &- a_{2,1}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) + a_{3,1}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) \\ &- a_{4,1}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

```
> eval(subs(Det=Determinant, rhs(%)));
```

$$\begin{aligned} &a_{1,1}\,(a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} - a_{2,2}\,a_{3,4}\,a_{4,3} - a_{2,3}\,a_{3,2}\,a_{4,4} + a_{2,3}\,a_{3,4}\,a_{4,2} \\ &\quad + a_{2,4}\,a_{3,2}\,a_{4,3} - a_{2,4}\,a_{3,3}\,a_{4,2}) - a_{2,1}\,(a_{1,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} - a_{1,2}\,a_{3,4}\,a_{4,3} \\ &\quad - a_{1,3}\,a_{3,2}\,a_{4,4} + a_{1,3}\,a_{3,4}\,a_{4,2} + a_{1,4}\,a_{3,2}\,a_{4,3} - a_{1,4}\,a_{3,3}\,a_{4,2}) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$+ a_{3,1} (a_{1,2} a_{2,3} a_{4,4} - a_{1,2} a_{2,4} a_{4,3} - a_{1,3} a_{2,2} a_{4,4} + a_{1,3} a_{2,4} a_{4,2} + a_{1,4} a_{2,2} a_{4,3} - a_{1,4} a_{2,3} a_{4,2}) - a_{4,1} (a_{1,2} a_{2,3} a_{3,4} - a_{1,2} a_{2,4} a_{3,3} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,4} + a_{1,3} a_{2,4} a_{3,2} + a_{1,4} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,4} a_{2,3} a_{3,2})$$

```
> expand(%-dA);
```

$$0 \tag{3.1.10}$$

Als weiteres Beispiel können wir z.B. nach der zweiten Zeile entwickeln:

```
> Det(A) = add((-1)^(i)*a[2,i]*Det(SubMatrix(A,[1,3,4],[seq(j,
  j=1..i-1),seq(j,j=i+1..4)])),i=1..4);
```

$$Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) = -a_{2,1}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) + a_{2,2}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) - a_{2,3}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{bmatrix}\right) + a_{2,4}\, Det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}\right) \tag{3.1.11}$$

```
> eval(subs(Det=Determinant, rhs(%)));
```

$$-a_{2,1} (a_{1,2} a_{3,3} a_{4,4} - a_{1,2} a_{3,4} a_{4,3} - a_{1,3} a_{3,2} a_{4,4} + a_{1,3} a_{3,4} a_{4,2} + a_{1,4} a_{3,2} a_{4,3} - a_{1,4} a_{3,3} a_{4,2}) + a_{2,2} (a_{1,1} a_{3,3} a_{4,4} - a_{1,1} a_{3,4} a_{4,3} - a_{1,3} a_{3,1} a_{4,4} + a_{1,3} a_{3,4} a_{4,1} + a_{1,4} a_{3,1} a_{4,3} - a_{1,4} a_{3,3} a_{4,1}) - a_{2,3} (a_{1,1} a_{3,2} a_{4,4} - a_{1,1} a_{3,4} a_{4,2} - a_{1,2} a_{3,1} a_{4,4} + a_{1,2} a_{3,4} a_{4,1} + a_{1,4} a_{3,1} a_{4,2} - a_{1,4} a_{3,2} a_{4,1}) + a_{2,4} (a_{1,1} a_{3,2} a_{4,3} - a_{1,1} a_{3,3} a_{4,2} - a_{1,2} a_{3,1} a_{4,3} + a_{1,2} a_{3,3} a_{4,1} + a_{1,3} a_{3,1} a_{4,2} - a_{1,3} a_{3,2} a_{4,1}) \tag{3.1.12}$$

```
> expand(%-dA);
```

$$0 \tag{3.1.13}$$

Allgemein lautet die Formel mittels Laplace-Entwicklung:
Für die j-te Zeile:

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot B_{j,i}$$

Für die k-te Spalte:

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot B_{i,k}$$

Hierbei ist $B_{i,j}$ die Matrix, welche aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

MATH: Unsere Formel für die Determinante, gegeben durch Laplace-Entwicklung, - im Folgenden auch wieder kurz mit Det bezeichnet - hat drei Eigenschaften, wenn man sie als Formel für die Spalten A_i der Matrix A versteht:

I.) Die Determinante ist **multilinear** in jeder Spalte, d.h.

$$\mathrm{Det}(\mathrm{A}_1,\ldots,A_{k-1},A_k+B_k,A_{k+1},\ldots,A_n) = \mathrm{Det}(\mathrm{A}_1,\ldots,A_{k-1},A_k,A_{k+1},\ldots,A_n) + \mathrm{Det}(\mathrm{A}_1,\ldots,A_{k-1},B_k,A_{k+1},\ldots,A_n)$$

und

$$\mathrm{Det}(\mathrm{A}_1,\ldots,A_{k-1},a\cdot A_k,A_{k+1},\ldots,A_n) = a\cdot\mathrm{Det}(\mathrm{A}_1,\ldots,A_{k-1},A_k,A_{k+1},\ldots,A_n).$$

II.) Die Determinante ist **alternierend**, d. h. falls zwei Spalten gleich sind, ist der Wert der Determinante Null.

III.) Die Determinante ist **normiert**: $\mathrm{Det}(I_n) = 1$

DENKANSTOSS: Verifiziere diese drei Eigenschaften aus der obigen Formel heraus.

MATH: Mit Hilfe von I.) bis III.) kann man jetzt unsere definierenden Eigenschaften 1) und 2) überprüfen. Dabei folgt 1.) trivial aus der Formel, so dass nur 2.) offen bleibt:

Die i-te Spalte von $A\cdot B$ ist eine Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten $B_{1,i},\ldots,B_{n,i}$:

```
> A:=Matrix(4,4,symbol=a);
  B:=Matrix(4,4,symbol=b);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

```
> Column(A.B,3);
```

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}\,b_{1,3}+a_{1,2}\,b_{2,3}+a_{1,3}\,b_{3,3}+a_{1,4}\,b_{4,3} \\ a_{2,1}\,b_{1,3}+a_{2,2}\,b_{2,3}+a_{2,3}\,b_{3,3}+a_{2,4}\,b_{4,3} \\ a_{3,1}\,b_{1,3}+a_{3,2}\,b_{2,3}+a_{3,3}\,b_{3,3}+a_{3,4}\,b_{4,3} \\ a_{4,1}\,b_{1,3}+a_{4,2}\,b_{2,3}+a_{4,3}\,b_{3,3}+a_{4,4}\,b_{4,3} \end{bmatrix} \tag{3.1.15}$$

```
> A.Column(B,3);
```

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}\,b_{1,3}+a_{1,2}\,b_{2,3}+a_{1,3}\,b_{3,3}+a_{1,4}\,b_{4,3} \\ a_{2,1}\,b_{1,3}+a_{2,2}\,b_{2,3}+a_{2,3}\,b_{3,3}+a_{2,4}\,b_{4,3} \\ a_{3,1}\,b_{1,3}+a_{3,2}\,b_{2,3}+a_{3,3}\,b_{3,3}+a_{3,4}\,b_{4,3} \\ a_{4,1}\,b_{1,3}+a_{4,2}\,b_{2,3}+a_{4,3}\,b_{3,3}+a_{4,4}\,b_{4,3} \end{bmatrix} \tag{3.1.16}$$

Wegen der Multilinearität erhält man also
$\mathrm{Det}(A \cdot B) =$ Summe von Determinanten von Matrizen, deren Spalten von A kommen, mit Vorfaktoren, die Produkte in den B_{ij} sind.
Jede dieser Determinanten ist Null, falls eine Spalte von A mehrfach auftaucht.
Die übrigen sind bis aufs Vorzeichen gleich $\mathrm{Det}(A)$.
Ergebnis:
$\mathrm{Det}(A \cdot B) = f(B) \cdot \mathrm{Det}(A)$
wo $f(B)$ irgendeine Funktion ist, deren Wert durch die Einträge der Matrix B bestimmt ist.
Aus Symmetriegründen (mit Zeilen von B arbeiten):
$\mathrm{Det}(A \cdot B) = g(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$
Insgesamt:
$\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B) \cdot k$
mit $k \in K$, welches nicht mehr von A oder B abhängt.
Wir setzen $A = B =$ Einheitsmatrix und sehen, dass wir $k = 1$ setzen müssen.
Beweisende.

ÜBUNG [07]:

Zeige:
$\mathrm{Det}(A^{tr}) = \mathrm{Det}(A)$

Wir sind im allgemeinen nicht nur an Determinanten von Matrizen, sondern auch an Determinanten von Endomorphismen interessiert.

ÜBUNG [08]:

1) Definiere die Determinante eines Endomorphismus φ. Diese Definition darf (soll!) von der Wahl einer Basis des Vektorraumes abhängen.
2) Zeige, dass deine Wahl doch unabhängig von der gewählten Basis ist.

3) Warum betrachten wir keine Determinanten von allgemeinen Homomorphismen und nur von Endomorphismen?