Aufgabe aus der Analysis

ÜBUNG [01]:

Es sei $y > 0$. Zeigen Sie, dass zur Existenz eines uneigentlichen Integrals

$$\int_y^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

weder die Existens von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ noch die Beschränktheit von f notwendig ist.

Betrachten Sie dazu die Integrale:

a) $\int_1^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_1^\infty \sqrt{x}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Taylorentwicklungen

Aufgaben: 3

```
> restart;
```

Taylorpolynome

Statt linearer Approximation (aus dem Abschnitt "Differentiation: Definition, Eigenschaften und Beispiele") kann man auch versuchen, durch Polynomfunktionen höheren Grades zu approximieren. Im Grenzfall bekommt man Potenzreihen.

MATH: Die Ableitung $f'(a)$ der Funktion f in $x = a$ war so definiert, dass

$$f_1 : x \mapsto f(a) + f'(a)\cdot(x - a)$$

eine gute Approximation an f um a ist, und zwar nicht nur in dem Sinne, dass f und f_1 denselben Grenzwert $f(a)$ für x gegen a haben, sondern dass sogar

$$\frac{f(x) - f_1(x)}{x - a}$$

gegen den Grenzwert 0 konvergiert für x gegen a.

DENKANSTOSS: Verifiziere/wiederhole dies.

MATH: Es drängt sich auf, die Regel von L'Hospital anzuwenden auf

$$\frac{f(x) - f_1(x)}{(x - a)^2}$$

und zwar zweimal: Wir bekommen als Grenzwert

```
> Diff(f(x),x$2)/diff((x-a)^2,x$2);
```

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) \tag{2.1.1}$$

ausgewertet an der Stelle a. Dies setzt natürlich voraus, dass f zweimal differenzierbar ist in einer Umgebung von a. Aber wir können dann mit einer besseren Approximation f_2 statt f_1 weitermachen.

BEISPIEL: $f \coloneqq \log$, $a \coloneqq 1$.

```
> f:=log;
  f(1),subs(x=1,diff(f(x),x));
```

$$f := \log$$

$$0, 1 \tag{2.1.2}$$

```
> f1:=``(x-1);
```

$$f1 := (x-1) \tag{2.1.3}$$

MAPLE: Die Anführungszeichen ` ` zwingen Maple dazu den Ausdruck nicht auszuwerten, d.h. in diesem Fall die Klammern beizubehalten.

Um damit in Folgenden rechnen zu können, nutzen wir **op(f1)** um die Klammeren wieder zu entfernen.

```
> f1;
  op(f1);
```

$$(x-1)$$

$$x-1 \tag{2.1.4}$$

Wir überprüfen zuerst, ob wir die Regel von L'Hospital anwenden dürfen.

```
> limit(f(x)-op(f1),x=1);
```

$$0 \tag{2.1.5}$$

```
> limit(x-1,x=1);
```

$$0 \tag{2.1.6}$$

Nun wenden wir wie geplant L'Hospital an:

```
> limit(diff(f(x)-op(f1),x),x=1);
```

$$0 \tag{2.1.7}$$

```
> limit(diff((x-1)^2,x),x=1);
```

$$0 \tag{2.1.8}$$

Diesmal schenken wir uns die Überprüfung der Vorraussetzungen.

```
> limit(diff(f(x)-op(f1),x$2),x=1);
```

$$-1 \tag{2.1.9}$$

```
> limit(diff((x-1)^2,x$2),x=1);
```

$$2 \tag{2.1.10}$$

```
> f2:=f1-1/2*(x-1)^2;
```

(2.1.11)

$$f2 := (x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 \qquad \textbf{(2.1.11)}$$

```
> limit(diff(f(x)-subs(``(x-1)=(x-1),f2),x$3),x=1);
```

$$2 \qquad \textbf{(2.1.12)}$$

```
> limit(diff((x-1)^3,x$3),x=1);
```

$$6 \qquad \textbf{(2.1.13)}$$

```
> f3:=f2+2/6*(x-1)^3;
```

$$f3 := (x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{3}\,(x-1)^3 \qquad \textbf{(2.1.14)}$$

ÜBUNG [02]:

1) Erkläre die obige Rechnung.
2) Fahre auf dem obigen Wege fort und finde die nächsten beiden Approximationen f_4 und f_5.
3) Welche Differentiationseigenschaft von f wird dabei benötigt?
4) Zeichne $f, f_1, .., f_5$ im Bereich $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

MATH: Den Koeffizienten von $(x-a)^n$ in der Entwicklung kann man aus der obigen Diskussion ableiten als

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{f(x)}{n!}\right)\Bigg|_{x=a}$$

Da das Verfahren bei Polynomen abbrechen sollte, können wir dort eine Anleihe machen:

```
> subs(x=``(x-1),expand(subs(x=x+1,x^10)));
```

$$(x-1)^{10} + 10\,(x-1)^9 + 45\,(x-1)^8 + 120\,(x-1)^7 + 210\,(x-1)^6 + 252\,(x-1)^5 + 210\,(x-1)^4 + 120\,(x-1)^3 + 45\,(x-1)^2 + 10\,(x-1) + 1 \qquad \textbf{(2.1.15)}$$

```
> expand(%);
```

$$x^{10} \qquad \textbf{(2.1.16)}$$

Die Koeffizienten stimmen mit denen aus der Formel überein.:

```
> map(i->subs(x=1,diff(x^10,x$i))/i!,ListTools[Reverse]([$1..10]));
```

$$[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10] \qquad \textbf{(2.1.17)}$$

Taylorreihen

ÜBUNG [03]:

Bestimme *alle* Entwicklungskoeffizienten von log(x) in x=1 auf zwei Arten:

1) Die obige Methode durch Ableiten und Einsetzen. (**Hinweis**: Bestimme per Induktion alle Ableitungen des Logarithmus.)
2) Durch Umschreiben der Ableitung des Logarithmus in eine geometrischen Reihe. (**Hinweis**: Beachte auch den nullten Koeffizienten.)

MATH: Sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann nennt man die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n}{d\,x^n} \frac{f(x)}{n!} \right)_{|x=a} \cdot (x-a)^n$$

die **Taylorreihe** von f mit **Entwicklungspunkt** a.

MAPLE hat zwei Befehle, um diese approximierenden Polynome automatisch auzurechnen:

```
> taylor(sin(x),x=0,12);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \mathrm{O}(x^{13}) \quad \textbf{(2.2.1)}$$

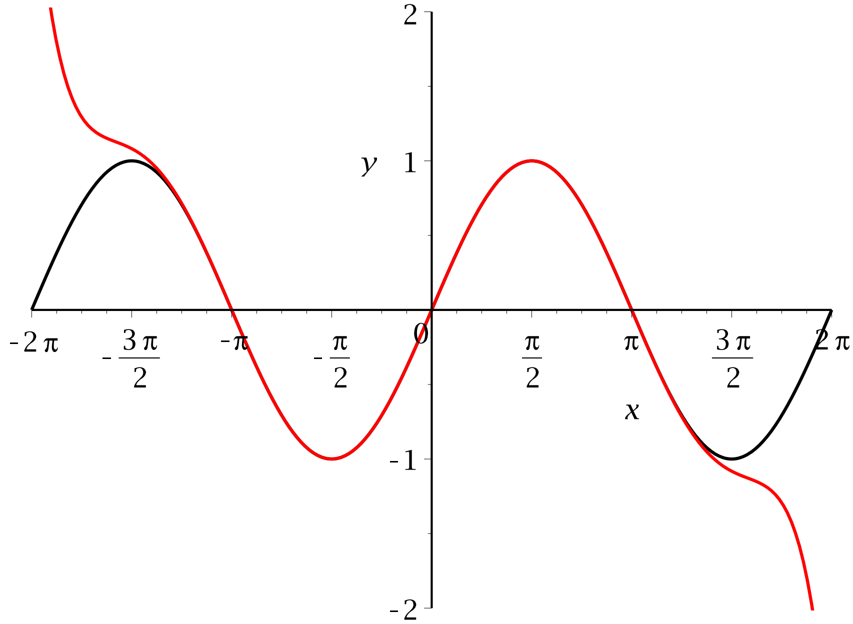
```
> series(sin(x),x=0,12);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \mathrm{O}(x^{13}) \quad \textbf{(2.2.2)}$$

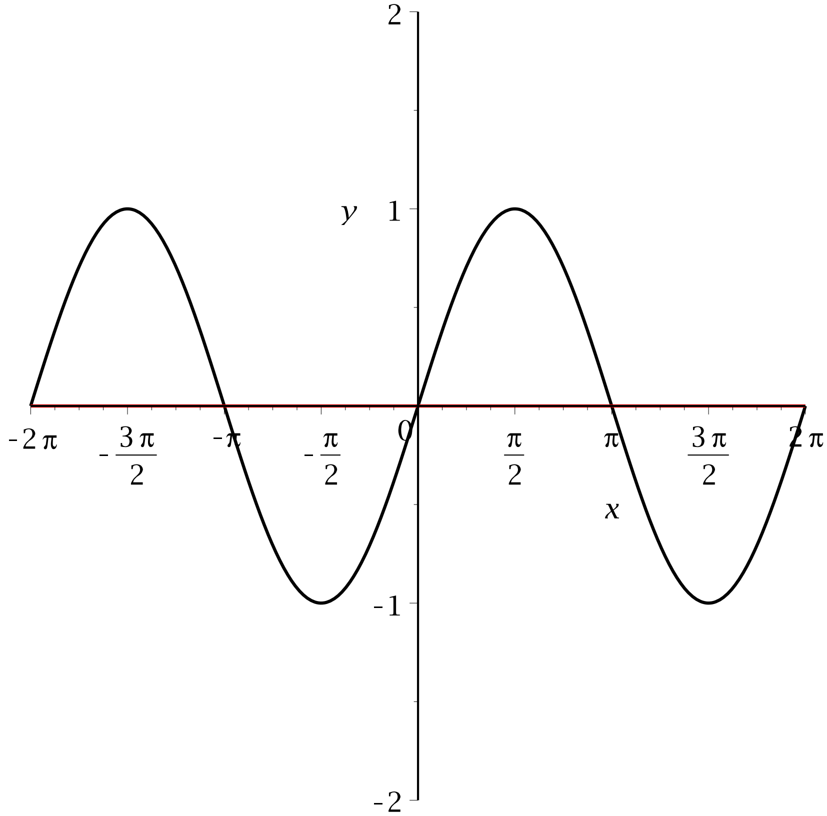
```
> map(i->eval(diff(sin(x),[x$i]),x=0)/i!,[$0..11]);
```

$$\left[0, 1, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{120}, 0, -\frac{1}{5040}, 0, \frac{1}{362880}, 0, -\frac{1}{39916800}\right] \quad \textbf{(2.2.3)}$$

```
> plot([sin(x),convert(series(sin(x),x,12),polynom)],x=-2*Pi.
.2*Pi,y=-2..2,color=[black, red]);
```




```
> l:=map(d->plot([sin(x),convert(series(sin(x),x,d),polynom)],
  x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,color=[black,red]),[$1..20]):
  plots[display](l,insequence=true);#insequence sorgt fuer die
  Animation
```



MAPLE kennt sogar die Formel:

```
> taylor(h(x),x=a,5);
```

$$h(a) + D(h)(a)\,(x-a) + \frac{1}{2}\,D^{(2)}(h)(a)\,(x-a)^2 + \frac{1}{6}\,D^{(3)}(h)(a)\,(x-a)^3 + \frac{1}{24}\,D^{(4)}(h)(a)\,(x-a)^4 + O\left((x-a)^5\right) \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

MATH: Man kann nun hoffen, dass bei einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f die Folge der Taylorpolynomfunktionen gegen die Funktion f zumindest in einer Umgebung von $x = a$ konvergiert. Wir haben oben nur eine Aussage über Grenzwerte für x gegen a bewiesen. Will man mehr, muß man das sogenannte Restglied, welches MAPLE gerade mit $O\left((x-a)^5\right)$ abgekürzt hat, abschätzen können. Dafür gibt es Darstellungen des Restgliedes aus der Vorlesung.

Eine Warnung:

DENKANSTOSS: Bei $f\colon x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ sind alle

Taylorpolynome gleich Null, konvergieren also nicht gegen f in einer Umgebung von 0.

In der folgenden Aufgabe sehen wir, in wie weit das Umschreiben von Funktionen in Taylorpolynome und Taylorreihen ein Ringhomomorphismus ist. Die Rechnungen sollte man mit Maple machen.

ÜBUNG [04]:

1) Ist die Abbildung, die jeder fünfmal differenzierbaren Funktion ihre Taylorpolynomfunktion vom Grad 5 zuordnet ein Ringhomomorphismus, also schickt die 1 auf die 1, ist additiv und multiplikativ?
2) Erkläre genau was bei der Multiplikation funktioniert und was nicht. (**Hinweise**: Die Addition ist offenbar harmlos. Was passiert mit den Graden der Polynome bei der Multiplikation? Man kann zum Beispiel beliebige Funktionen f und g in eine Taylorreihe entwickeln und multiplizieren und andererseits $f \cdot g$ in eine Taylorreihe entwickeln.)
3) Ist die Abbildung, die jeder unendlich oft differenzierbaren Funktion ihre Taylorreihe zuordnet ein Ringhomomorphismus? (**Hinweis**: Vergleiche das Cauchy-Produkt mit der Produktregel.)

Gleichmäßige Konvergenz, Existenz der Stammfunktion einer stetigen Funktion

Aufgaben: 4

```
> restart;
  with(plots):
```

Gleichmäßige Konvergenz

MATH: Wie wir früher Zahlenfolgen betrachtet haben, kann man auch Folgen von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich betrachten. Für jeden Punkt des Definitionsbereiches bekommt man dann eine Folge im alten Sinne. Sind alle diese Folgen konvergent, so spricht man von **punktweiser Konvergenz**.

BEISPIEL:

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n.$$

```
> limit((1/2)^n,n=infinity);
```

$$0 \qquad (3.1.1)$$

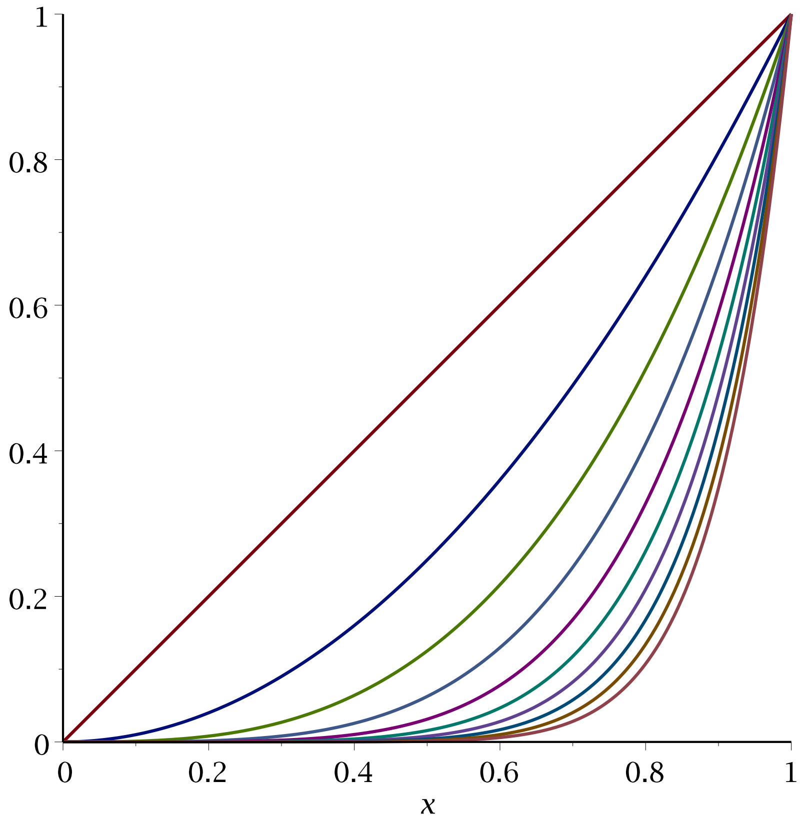
```
> limit((1)^n,n=infinity);
```

$$1 \qquad (3.1.2)$$

Man sieht, dass jedes f_n stetig ist, das die Folge

$$f_n(x)$$
für jedes feste $x \in [0, 1]$ konvergiert, also eine Grenzfunktion
$$f: [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
existiert, aber dass diese nicht stetig ist.
Schauen wir uns dies am Plot an:

```
> d1:=plot(map(i->x^i,{$1..10}),x=0..1):
  display(d1,scaling=constrained);
```



ÜBUNG [05]:

1) Begründe (kurz!)
$$f_n: [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$
definiert eine Funktionenfolge auf $[0, 1]$ von stetigen Funktionen.

2) Zeige: Die Folge ist punktweise konvergent gegen eine unstetige Funktion.

MATH: Da sich also der punktweise Konvergenzbegriff nicht gut mit der

Stetigkeit verträgt, braucht man einen eingeschränkteren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen, damit man wenigstens die Stetigkeit der Grenzfunktion bekommt. Dieses ist die gleichmäßige Konvergenz:

Die Funktionenfolge

$$f_n : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmäßig gegen

$$f : \mathrm{D} \to \mathbb{R} \quad ,$$

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > n_0$ und alle $x \in \mathrm{D}$.

MATH: Sind die f_n alle stetig, so auch *f*.

DENKANSTOSS: Formuliere das (notwendige und hinreichende) Cauchy-Kriterium und das (hinreichende) Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz.

BEISPIEL: Im obigen Beispiel liegt also keine gleichmäßige Konvergenz vor. Man kann jedoch ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall D von $[0, 1)$ betrachten.
Wie oben gesehen, hat man dort punktweise Konvergenz mit Hilfe von

$$n_0(x, \varepsilon).$$

Man findet jedoch für ein festes ε eine gemeinsame Majorante

$$n_0(\varepsilon) \geq n_0(x, \varepsilon)$$

für alle $x \in \mathrm{D}$. Mit Hilfe von dieser Majorante sieht man, dass gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Der Weierstraßsche Approximationssatz und Bernsteinpolynome

MATH: Der Weierstraßsche Approximationssatz besagt, dass für jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ von Polynomfunktionen mit $Grad(p_n) \leq n$ existiert, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

MATH: Der Weierstraßsche Approximationssatz hat einen sehr expliziten Beweis mit Hilfe der Bernsteinpolynome:
Jede stetige Funktion

$$f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$$

ist Grenzfunktion der Folge der Bernsteinpolynome $B_{(n, f)}$ von *f*, welche gleichmäßig gegen *f* konvergiert, also $\lim_{n \to \infty} B_{(n, f)}(x) = f$.
Die Bernsteinpolynome sind dabei gegeben als:

$$B_{(n,\,f)}(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{k} \cdot (1-x)^{n-k}$$

ÜBUNG [06]:

1) Schreibe eine Maple-Funktion, die für eine stetige Funktion *f* auf dem Intervall $[-1, 1]$ das approximierende Bernsteinpolynom der Ordnung *n* bestimmt.

2) Plotte den Fall

$$f(x) := |x|$$

für einige n.
(Hinweis: Benutze z. B. die Transformation

$$x \mapsto 2\,x-1,$$

um von dem Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ umzurechnen.)

Potenzreihen als Funktionenfolgen

MATH: Eine sehr wichtige Klasse von gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen werden durch die Potenzreihen geliefert:
Auf jedem Kompaktum, welches im (offenen) Konvergenzkreis liegt, konvergiert die Folge der Teilsummen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, die somit stetig ist.
Dabei liegt es nahe, von vornherein den Definitionsbereich als Teilmenge von C statt = zu betrachten.

Man kann sich schnell Beispiele aus den Folgen von Taylorpolynomen konstruieren:

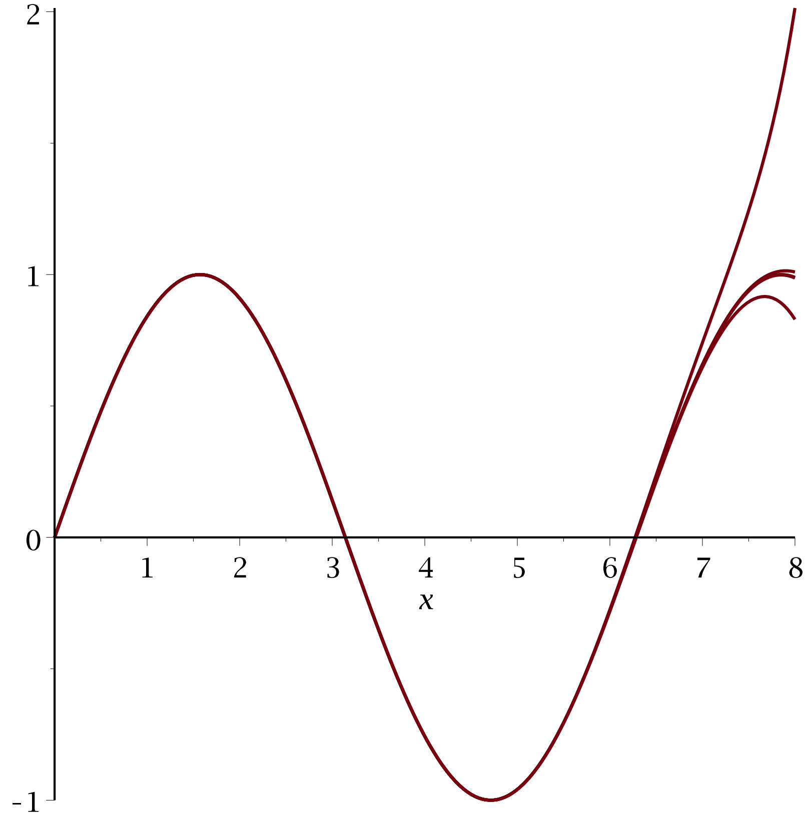
```
> s:=k->add((-1)^(i)*(x)^(2*i+1)/(2*i+1)!,i=0..k);
```

$$s := k \rightarrow add\left(\frac{(-1)^{i}\,x^{2\,i+1}}{(2\,i+1)!},\ i=0..k\right) \tag{3.3.1}$$

```
> s(5);
```

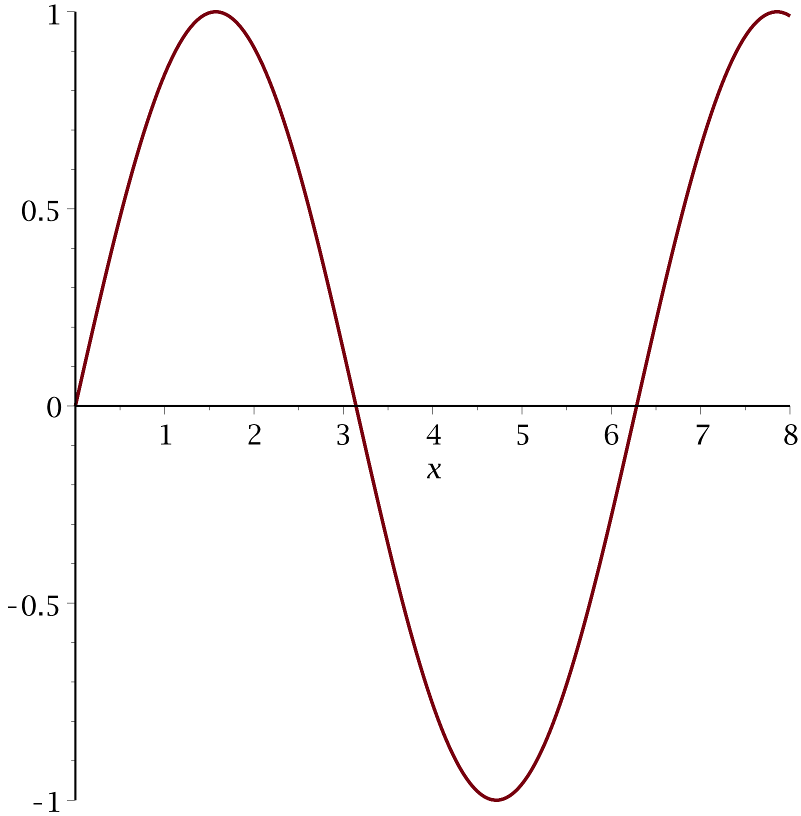
$$x-\frac{1}{6}\,x^{3}+\frac{1}{120}\,x^{5}-\frac{1}{5040}\,x^{7}+\frac{1}{362880}\,x^{9}-\frac{1}{39916800}\,x^{11} \tag{3.3.2}$$

```
> display(map(k->(plot(s(k),x=0..8)),[$8..12]));
```



DENKANSTOSS: Man experimentiere mit den Intervallgrenzen und dem *k*, um ein Gefühl für die Konvergenz zu bekommen.

```
> display(map(k->(plot(subs(x=x-Pi,-s(k)),x=0..8)),[$8..12]));
```



Es sieht also so aus, als ob unsere Funktionenfolge gegen eine Punktion *f* konvergiert mit

$$f(x-\pi) = -f(x)$$

für alle *x*. Insbesondere wäre *f* dann 2π-periodisch. Dies ist natürlich kein Beweis, es wird lediglich durch die Bilder nahegelegt.

DENKANSTOSS: Durch welche Formel wird der Konvergenzradius einer Potenzreihe festgelegt?

MATH: Wir hatten bereits früher in dem Reihenworksheet von

$$\exp, \sin, \cos$$

und den Zusammenhängen zwischen den dreien gesprochen. Der Konvergenzradius ist in allen drei Fällen unendlich. Damit folgt, dass alle drei Funktionen stetig sind, denn wir haben gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum. Wir wissen auch schon, dass

$$\exp$$

$2\,i\pi$-periodisch ist und damit

$$\sin \text{ und } \cos$$

2π-periodisch sind: 2π ist die kleinste positive Zahl mit

$$\exp(i \cdot 2 \cdot \pi) = 1,$$

d. h. mit

$$\sin(2 \cdot \pi) = 0 \text{ und } \cos(2 \cdot \pi) = 1.$$

Die Periodizität für

exp

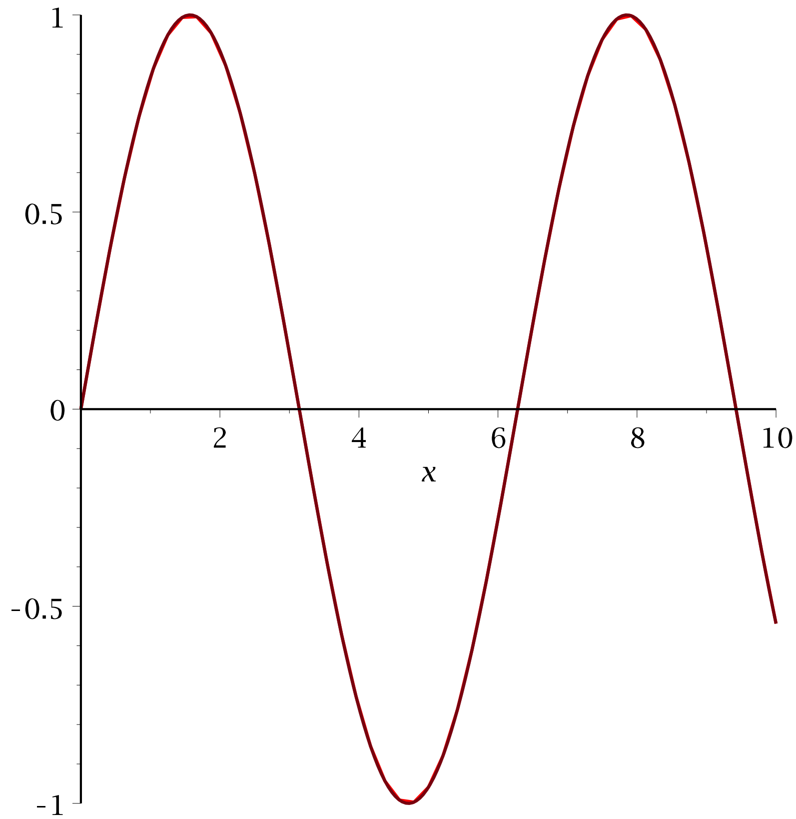
folgt dann aus der fundamentalen Eigenschaft, das exp Summen in Produkte überführt:

$$\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$$

ist Homomorphismus.

Wir wollen betrachten, was beim Verschieben von Potenzreihen passiert.

```
> B:=plot(sin(x),x=0..10):
  display({B,animate(sin(x-a),x=0..10,a=0..Pi)});
```



Beachte: Der Funktionsgraph von $\sin(x)$ schiebt sich bei $\sin(x-a)$ um a nach rechts!

Die Additionstheoreme drücken den verschobenen sin als Linearkombination von sin und cos aus.

```
> expand(sin(y+1));
```

$$\sin(y) \cos(1) + \cos(y) \sin(1) \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

```
> subs(y=x-1,%);
```

$$\sin(-1+x)\cos(1)+\cos(-1+x)\sin(1) \tag{3.3.4}$$

ÜBUNG [07]:

1) Benutze die gerade vorgeführte Rechnung, um

$$\sin(x)$$

als eine Potenzreihe in $x-1$ darzustellen. (Hinweis: Verschaffe Dir zuerst die Partialsummen der Cosinusreihe analog zu s oben.)

2) Begründe, warum die *k*-te Partialsumme nicht mit

```
subs(x=x-1,expand(subs(x=x+1,s(k))))
```

identisch ist.

3)

Sei eine Funktion

$$f\colon(-r,r)\to\mathbb{R}$$

dargestellt durch eine Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

in x mit Konvergenzradius r.

a) Zeige, dass eine Stammfunktion von f ebenso als Potenzreihe in x dargestellt werden kann.

b) Wie sieht diese Stammfunktion aus?

c) Welchen Konvergenzradius hat diese Stammfunktion?

Existenz der Stammfunktion einer stetigen Funktion

Mit Hilfe der hier vorgestellen Methoden kann man einen Beweis angeben, dass stetige Funktionen integrierbar sind. Dieser Beweis zeigt eine typische Anwendungen der gleichmäßigen Konvergenz an einer einfachen Aussage.

MATH: Die Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen auf einem Intervall folgt nun sehr leicht aus

1.) der gleichmäßigen Approximierbarkeit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen durch Polynomfunktionen und

2.) dem folgenden Satz.

MATH: Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf einem beschränktem Intervall I. Die Funktionenfolge $(f'_n)_{n\geq 1}$ konvergiere auf I gleichmäßig gegen eine Funktion $g: I\to\mathbb{R}$. Wenn ein $c\in I$ existiert so, dass $(f_n(c))_{n\geq 1}$ konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f: I\to\mathbb{R}$ mit $f'=g$.

ÜBUNG [08]:

Begründe ausführlich mit der hier vorgestellen Beweisidee, warum jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat.

DENKANSTOSS: Vergleiche den in diesem Worksheet vorgestellten Beweis mit dem Beweis aus deiner Vorlesung.