Maple-Praktikum für Lehramt 2018 - Blatt 2

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 17 (ab 23. April) testiert.

Aufgaben: 4

```
> restart;
  with(LinearAlgebra);
```

In der Mathematik ist es äußerst wichtig, dass wir präzise angeben, worüber wir gerade sprechen. Deshalb sollen Sie zunächst noch einmal einige wichtige Definitionen der linearen Algebra in Ihr Gedächtnis rufen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:
1.) K-Vektorraum über einem Körper K,
2.) Basis eines Vektorraums.

Die folgende Übung behandelt einige Beispiele.

ÜBUNG [02]:

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über dem jeweiligen Körper K mit der üblichen Addition und Multiplikation? Geben Sie für jeden der Vektorräume eine Basis an. Sie dürfen jeweils ohne Beweis verwenden, dass K ein Körper ist.
1.) $M = \mathbb{R}[x]_{\leq 5} := \{p \in \mathbb{R}[x] | \mathrm{grad}(p) \leq 5\}$ und $K = \mathbb{R}$.
2.) $M = \mathbb{R}[x]$ und $K = \mathbb{R}$.
3.) $M = \mathbb{F}_4^{2 \times 3}$ und $K = \mathbb{F}_4$ der Körper mit genau vier Elementen.
4.) $M = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}$.
5.) $M = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Q}$. *Hier brauchen Sie keine Basis anzugeben.*

In der linearen Algebra sollten Sie auch einige Grundbegriffe der Gruppentheorie kennen gelernt haben.

ÜBUNG [03]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:
1.) Gruppe,
2.) Erzeugendensystem einer Gruppe,

3.) Ordnung einer Gruppe,
4.) Generelle lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ für $n \in \mathbb{N}$ und einen Körper K.
5.) Gruppenoperation,
6.) Bahn.

Zusätzlich benötigen wir noch zwei weitere Begriffe:
Die **Ordnung** einer Gruppe ist die Kardinalität der zugrunde liegenden Menge. Bei endlichen Gruppen ist dies nichts anderes als die Anzahl der Elemente.
Eine Teilmenge $M \subseteq G$ einer Gruppe G heißt **Erzeugendensystem** von G, wenn jedes Element von G als Produkt von endlich vielen Elementen und Inversen von Elementen von E geschrieben werden kann.

Wir betrachten nun eine endliche Gruppe G mit Erzeugendensystem E. Diese Gruppe operiere auf einer Menge M durch Multiplikation von links. Folgendes Programm berechnet die Bahn von $m \in M$.

```
> Bahn := proc (E,m)
    local B,flag,g,b,gb;
    B := {m};
    flag := true;
    while flag do
      flag := false;
      for b in B do
        for g in E do
          gb := g*b;
          if (not(gb in B)) then
            B := B union {gb};
            flag := true;
          end if:
        end do:
      end do:
    end do:
    return B;
  end proc:
```

ÜBUNG [04]:

1.) Verstehen Sie das Programm Bahn und versehen Sie es mit Kommentaren.
2.) Begründen Sie, warum es die Bahn von m berechnet und warum es terminiert (d. h. nicht endlos läuft)
3.) Begründen Sie, warum das Programm nicht sonderlich effizient ist. (*Hinweis*: Eine effizientere Version des Algorithmus läuft in $\mathcal{O}(|B| \cdot |E|)$.)

4.) Modifizieren Sie `Bahn`, um damit die Ordnung der von $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ erzeugten Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ zu bestimmen. (*Hinweis*: Matrizen können in Maple nicht sinnvoll mit `=` verglichen werden. Dadurch funktioniert der Befehl `in` für Matrizen nicht richtig. Schreiben Sie eine Hilfsfunktion, die prüft, ob eine Matrix in einer Menge enthalten ist. Der Befehl `Equal` ist dafür hilfreich.)