Maple-Praktikum für Lehramt 2018 - Blatt 8

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 24 (ab 11. Juni) testiert.

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra);
```

Diese Woche beschäftigen wir uns mit Basiswechseln.

ÜBUNG [01]:

Betrachten Sie die folgenden Tupel von Vektoren aus $\mathbb{R}^{4\times 1}$:

$$B_1 = \left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right), B_2 = \left(\begin{bmatrix}6\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\2\\7\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\\1\\8\end{bmatrix}\right), B_3 = \left(\begin{bmatrix}4\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\4\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\end{bmatrix}\right), B_4 = \left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\6\\4\\6\end{bmatrix}\right)$$

.

1.) Welche dieser Tupel sind Basen des $\mathbb{R}^{4\times 1}$?

2.) Berechnen Sie für alle Basen B_i und B_j die Basiswechselmatrizen ${}^{B_i}id^{B_j}$. *Hinweis: Ein Umweg über die Standardbasis kann sehr viel Zeit sparen.*

3.) Schreiben Sie die Vektoren v $:= \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ und $w := \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$ in jeder dieser Basen.

ÜBUNG [02]:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien U, V zwei $\mathbb{R}$-Untervektorräume des $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Definiere $M(U, V) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | Xu \in V \text{ für alle } u \in U\}$.
1.) Zeigen Sie, dass $M(U, V)$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.
2.) Wie können Sie Basiswechselmatrizen geschickt nutzen, um eine Basis von $M(U, V)$ auszurechnen? Können Sie aus den Dimensionen von U und V auf die Dimension von $M(U, V)$ schließen? *Hinweis: Ergänzen Sie jeweils Basen von U und V zu Basen des $\mathbb{R}^{n \times 1}$ und betrachten Sie lineare Abbildungen bezüglich dieser Basen. Danach wechseln Sie auf die Standardbasis.*
3.) Schreiben Sie ein Programm, das zwei $\mathbb{R}$-Teilräume $U, V \leq \mathbb{R}^{n \times 1}$ als Eingabe erhält und eine Basis von $M(U, V)$ ausgibt. Sie können hierbei selbst entscheiden, welche Form die Eingabe hat.
4.) Testen Sie Ihr Programm mit $U := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und $V := \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Nun betrachten wir den Vektorraum der Matrizen $\mathbb{R}^{n \times m}$ und wenden die vorherige Übung an.

ÜBUNG [03]:

Seien jetzt U und V $\mathbb{R}$-Teilräume des $\mathbb{R}^{n \times m}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ (Die Elemente von U und V sind also Matrizen.). Auf diesem Raum definieren wir die Standardbasis $E = (E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1m}, E_{21}, \ldots, E_{nm})$ der Matrizen E_{ij}, die an der Stelle (i, j) eine 1 und an allen anderen Stellen eine 0 haben.
1.) Schreiben Sie eine Funktion, die einen $\mathbb{R}$-Teilraum $U \leq \mathbb{R}^{n \times m}$ als Eingabe erhält und diesen in der Basis E schreibt, also einen $\mathbb{R}$-Teilraum $U_E \leq \mathbb{R}^{nm}$ ausgibt. Sie können wieder ein geeignetes Format für das Übergeben von Vektorräumen wählen.
2.) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^{n \times m}$ einige lineare Abbildungen:
$M := \{f : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m} | \text{es existiert ein } X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } f(A) = XA \text{ für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$.
Zeigen Sie, dass M ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und geben Sie eine Basis von M an. Welche Dimension hat M?
3.) Wir definieren ähnlich wie in Übung [02] die Menge $L(U, V) := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | Xu \in V \text{ für alle } u \in U\}$. Zeigen Sie, dass $L(U, V)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und erläutern Sie, wie mithilfe der vorherigen Aufgaben eine Basis von $L(U, V)$ berechnen werden kann. *Hinweis: Mit dem Zassenhaus-Algorithmus kann für den Schnitt zweier Vektorräume eine Basis bestimmt werden. Sie müssen nicht begründen, warum dieser Algorithmus funktionert.*