

Maple-Praktikum für Lehramt 2018 - Blatt 10

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 26 (ab 25. Juni) testiert.

Aufgaben: 5

```
> restart;  
with(LinearAlgebra);
```

In diesem Übungsblatt soll es um Bilinearformen und Skalarprodukte gehen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:

- 1.) Bilinearform
- 2.) Skalarprodukt

Zunächst wollen wir uns die Gram-Matrix etwas näher ansehen:

Definition: Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V . Dann heißt die Matrix ${}_B\Phi^B$ mit Einträgen ${}_B\Phi^B_{i,j} = \Phi(b_i, b_j)$ *Gram-Matrix* bezüglich B von Φ .

ÜBUNG [02]:

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Sei ${}_B\Phi^B$ die Gram-Matrix dieses Skalarprodukts bezüglich B .

1.) Zu $v \in V$ bezeichne ${}^Bv \in K^{n \times 1}$ den Koordinatenvektor, d.h. $v = \sum_{i=1}^n ({}^Bv)_i \cdot b_i$. Zeigen

Sie: $(v, w) = ({}^Bv)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw$ für alle $v, w \in V$.

2.) Zeigen Sie: ${}_B\Phi^B$ ist invertierbar.

3.) Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutig bestimmte Basis $B^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)$, so dass $(b_i, b_j^*) = \delta_{ij}$ das Kronecker-Delta ist. Diese Basis heißt Dualbasis zu B bezüglich (\cdot, \cdot) . *Hinweis: Die Gram-Matrix des Skalarprodukts bezüglich B ist invertierbar.*

Nun betrachten wir den Spezialfall eines \mathbb{R} -Vektorraums.

ÜBUNG [03]:

1.) Auf \mathbb{R}^n sei eine symmetrische Bilinearform definiert durch

$\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^{tr} G y$ für eine symmetrische Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix $T \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass

$T^{tr} G T = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0) = \text{diag}(I_r, -I_s, 0_{t \times t})$ gilt. Das Tripel (r, s, t) ist eindeutig bestimmt und wird die **Signatur** von β genannt. *Hinweis: Man kann dies mit dem Spektralsatz zeigen.*

2.) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebener Matrix G die Signatur und die Matrix T ausrechnet. *Hinweis: Ihr Algorithmus wird sich vermutlich am Gauß-Algorithmus orientieren. Anstatt die Pivot-Elemente an eine geeignete Stelle zu tauschen, sollten Sie mit Additionen arbeiten. Ansonsten könnte eine andere Null an die entsprechende Stelle gelangen.*

3.) Wie kann man an der Signatur ablesen, ob β ein Skalarprodukt ist?

Sie kennen sicher bereits das Standardskalarprodukt. Es gibt aber durchaus auch noch andere Skalarprodukte, etwa das folgende.

ÜBUNG [04]:

Auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ haben wir die Bilinearform

$\gamma: W \times W \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \int_0^1 p(x)q(x) dx$. Zeigen Sie, dass γ ein Skalarprodukt ist und

bestimmen Sie die Dualbasis von $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ bezüglich γ . *Hinweis: Stellen Sie die Gram-Matrix von γ bezüglich einer geeigneten Basis auf.*

Weiter oben haben Sie bereits Dualbasen kennengelernt. In der folgenden Übung interessieren wir uns für selbstduale Basen, d. h. Basen B mit $B^* = B$. Diese lassen sich mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren berechnen.

ÜBUNG [05]:

Betrachte den \mathbb{R} -Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Auf V sei ein Skalarprodukt β gegeben durch eine Matrix G , d. h. $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto ({}^E v)^{tr} \cdot G \cdot ({}^E w)$, wobei E die Standardbasis ist.

1.) Schreiben Sie ein Programm, das G als Eingabe erhält, das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren ausführt und schließlich eine selbstduale Basis B

ausgibt.

2.) Nutzen Sie Ihr Programm, um eine selbstduale Basis von W aus Übung [04] bezüglich γ zu finden.

3.) Was haben selbstduale Basen mit der Matrix T aus Übung [03] zu tun?