Maple-Praktikum für Lehramt 2018 - Blatt 11

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 27 (ab 02. Juli) testiert.

Aufgaben: 5

```
> restart;
```

In diesem Worksheet soll es um die Taylorsche Formel und Taylorreihen gehen.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie folgende Definitionen an:
1.) Potenzreihe,
2.) Entwicklungspunkt,
3.) Konvergenzradius.

Die Taylorsche Formel und die Taylorreihe sind Ihnen vermutlich schon aus der Analysis bekannt:

Definition (*Taylorsche Formel*): Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit f ist n Mal differenzierbar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

für ein $\xi = \xi_n \in (x_0, x)$ das *Restglied von Lagrange* ist.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Eine erste Anwendung der Taylorschen Formel ist die folgende Übung.

ÜBUNG [02]:

Beweisen Sie mithilfe der Taylorschen Formel:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \le \ln(1+x) \le x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \text{ für } x \ge 0.$$

Bei der Taylorentwicklung kann man schön beobachten, wie sich die Taylorpolynome an die eigentliche Funktion anschmiegen.

ÜBUNG [03]:

1.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar), einer Stelle x_0 und einem beliebigen $k \in \mathbb{N}$, das Taylorpolynom vom Grad k um x_0 zurückgibt. Dabei dürfen Sie nicht die vordefinierten Funktionen zur Berechnung von Taylorpolynomen verwenden, insbesondere nicht `taylor`; selbstverständlich dürfen Sie aber damit Ihre Ergebnisse überprüfen.
2.) Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 3 der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x) \cdot e^{\sin(x^2+1)}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = -2$ und der Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(8x^4 - 6x^2 + 2)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 4$.
3.) Plotten Sie jede der Funktionen aus 2.) zusammen mit ihrem jeweiligen Taylorpolynom.
4.) Was gibt Ihr Programm zurück, wenn f eine Polynomfunktion vom Grad k ist?

ÜBUNG [04]:

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Taylorreihe einer Funktion f konvergiert genau dann gegen $f(x)$ für ein x aus dem Definitionsbereich, wenn das Restglied gegen Null konvergiert.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Auf Blatt 5 haben Sie bereits das Bisektionsverfahren zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle von f kennengelernt. Ein weiteres Verfahren zur Nullstellenbestimmung ist das **Newton-Verfahren**. Dabei wird jeweils von einem Punkt x_n aus die Tangente an f bestimmt und x_{n+1} auf deren Nullstelle gesetzt. Dieser Schritt wird nun so lange wiederholt, bis der neue Punkt hinreichend nahe an der Nullstelle liegt.

ÜBUNG [05]:

1.) Bestimmen Sie eine Formel, mit der x_{n+1} aus x_n, $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ berechnet werden kann.
2.) Schreiben Sie eine Prozedur, die eine stetig differenzierbare Funktion f, den Startwert x_0 und eine Toleranz `tol` als Parameter hat und mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle von f sucht.

3.) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f\colon [1,\, 4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ mithilfe des Newtonverfahrens.