Maple-Praktikum für Lehramt 2018 - Blatt 12

Dieses Blatt wird in Kalenderwoche 28 (ab 09. Juli) testiert.

Aufgaben: 4

```
> restart;
  with(LinearAlgebra);
```

Diese Woche beschäftigen wir uns mit Eigenwerten, Eigenräumen und Diagonalisierung.

ÜBUNG [01]:

Geben Sie die folgenden Definitionen an:
1.) Endomorphismus
2.) Eigenwert
3.) Eigenvektor
4.) Eigenraum
5.) Minimalpolynom eines Endomorphismus
6.) Minimalpolynom eines Vektors

Gehen wir zunächst einmal davon aus, dass wir bereits einen Eigenwert kennen und uns für den zugehörigen Eigenraum interessieren.

ÜBUNG [02]:

1.) Schreiben Sie eine Prozedur `Eigen`, die zu einer gegebenen Matrix A und einem Wert a eine Basis des zugehörigen Eigenraums $E_A(\alpha)$ bestimmt.
2.) Nutzen Sie Ihr Programm, um die Eigenräume der Matrix

$$\begin{bmatrix} -5 & 308 & -469 & 210 \\ -3 & 176 & -255 & 126 \\ -3 & 132 & -211 & 126 \\ -2 & 44 & -82 & 84 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

zu bestimmen. *Hinweis: Die Eigenwerte sind 0, 44 und -44.*

Oft kennen wir die Eigenwerte eines Endomorphismus noch nicht, sondern wollen diese zunächst bestimmen. Dazu benutzen wir das Minimalpolynom. In der linearen Algebra haben Sie einen Algorithmus zu seiner Bestimmung kennen gelernt.

ÜBUNG [03]:

1.) Erklären Sie den Algorithmus zur Bestimmung des Minimalpolynoms eines Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$.
2.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix A und einem gebenen Vektor v das Minimalpolynom von v bzgl. A und eines Basis des von $\{\alpha^i(v) | i \in \mathbb{N}\}$ aufgespannten Vektorraums berechnet. *Hinweis: Der Befehl Rank könnte nützlich sein.*
3.) Benutzen Sie Ihr Programm, um das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ bzgl.

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 16 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -12 & -5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$ zu bestimmen.

4.) Schreiben Sie ein Programm, das zu einer gegebenen Matrix A das Minimalpolynom von A berechnet. *Hinweis: Mit dem Befehl lcm können Sie kleinste gemeinsame Vielfache bestimmen.*
5.) Benutzen Sie Ihr Programm, um das Minimalpolynom von A zu bestimmen.
6.) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Eigenwerte und Eigenräume tauchen in der *Diagonalisierung* einer Matrix auf. Wenn die Eigenvektoren eine Basis des Vektorraums bilden, kommen wir durch die zugehörige Basiswehselmatrix auf eine Diagonalgestalt.

ÜBUNG [04]:

1.) Sei $A := \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{13}{2} & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 16 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -12 & -5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$. Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T, so dass $A = T^{-1} D T$.

2.) Nutzen Sie die Matrizen aus Teil 1, um A^{50} zu berechnen.