Die Regel von L'Hospital

Aufgaben: 2

```
> restart;
```

Die Regel von L'Hospital

MATH: Eine wichtige Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes ist die Regel von L'Hospital in ihren verschiedensten Versionen, die beispielsweise den Grenzwert von Quotienten zweier Funktionen, die gegen Null konvergieren, auf den Grenzwert des Quotienten der beiden Ableitungen reduziert:
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ oder $b = \infty$. Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g: (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt

$$\lim_{x \to b,\, x \le b} f(x) = \lim_{x \to b,\, x \le b} g(x) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\lim_{x \to b,\, x \le b} f(x), \lim_{x \to b,\, x \le b} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$$

und existiert

$$\lim_{x \to b,\, x \le b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

so gilt

$$\lim_{x \to b,\, x \le b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

.

BEISPIEL:

```
> a:=x-1/6*x^3+1/120*x^5-1/5040*x^7+1/362880*x^9;
```

$$a := x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{362880} x^9 \tag{1.1.1}$$

```
> limit(sin(x)-a,x=0);
```

$$0 \tag{1.1.2}$$

```
> limit(x^11,x=0);
```

$$0 \tag{1.1.3}$$

Gesucht ist

```
> limit((sin(x)-a)/x^11,x=0);
```

$$-\frac{1}{39916800} \tag{1.1.4}$$

Da die ersten 10 Ableitungen von x^{11} noch alle an der Stelle Null den Wert Null haben, müssen wir wahrscheinlich 11 mal ableiten:

```
> map(i->limit(diff(sin(x)-a,x$i),x=0),[$1..11]);
```

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1] \tag{1.1.5}$$

```
> diff(x^11,x$11);
```

$$39916800 \tag{1.1.6}$$

Womit die MAPLE-Bestimmung des Grenzwertes verifiziert ist.

ÜBUNG [01:

Prüfe Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel von

1) $\frac{g}{h}$

2) $\frac{g^2}{h^2}$

3) $\frac{g}{h^2}$

für x gegen 0 mit

```
g := ln(1+x)-x+1/2*x^2-1/3*x^3+1/4*x^4-1/5*x^5+1/6*x^6-1/7*
x^7+1/8*x^8-1/9*x^9+1/10*x^10;
```

$$g := \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{10}x^{10}$$

```
h:=arctan(x)-x+1/3*x^3-1/5*x^5+1/7*x^7-1/9*x^9;
```

$$h := \arctan(x) - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9$$

MATH: Wichtig ist die Einsicht, daß $x \mapsto x$ schneller nach unendlich strebt als jede Potenz des Logarithmus, was man leicht mit einer geeigneten Variante von L'Hospital sieht:

ÜBUNG [02]:

Zeige per Induktion mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)^n}{x} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Gruppenhomomorphismen, S_n, Signum

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Symmetrische Gruppe

MATH: Abbildungen von algebraischen Strukturen, die das Rechnen übertragen heißen **Homomorphismen**. Wir nehmen Gruppen als algebraische Struktur und wollen einige wichtige Beispiele von Gruppenhomomorphismen kennenlernen.

Genauer: Seien G und H Gruppen. Ein **Gruppenhomomorphismus** ist eine Abbildung $f: (G,\cdot) \to (H,\bullet)$ für die gilt

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2) \text{ für alle } g_1, g_2 \in G.$$

DENKANSTOSS: Hieraus folgt $f(1_G) = 1_H$, sowie $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Weiterhin ist ein Mono-, Epi- bzw. Isomorphismus ein injektiver, surjektiver bzw. bijektiver Homomorphismus.

Ist die Gruppe kommutativ, schreibt man häufig $+$ anstatt $\cdot$ für die Verknüpfung, man muss also aufpassen!

Ein Beispiel kennen wir schon: lineare Abbildungen. Schließlich sind Vektorräume Gruppen und lineare Abbildungen sind mit der Addition verträglich.

Die erste Gruppe, die wir behandeln, ist die Gruppe S_n aller bijektiven Abbildung von

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

in sich, genannt die **symmetrische Gruppe** auf n Symbolen. Die Elemente werden auch **Permutationen** von $\{1, 2, \ldots, n\}$ genannt.
Wir schreiben eine Permutation π als n-Tupel (Zweite-Zeile-Schreibweise)

$$[\pi(1), \ldots, \pi(n)].$$

Hier ein Programm für das Produkt in dieser Datenstruktur:

```
> pro:=proc(a::list,b::list)
    if nops(a)<>nops(b) or {op(a)}<>{$1..nops(a)} or {op(b)}<>
  {$1..nops(a)} then
      error "Falsche eingabe";
    end if;
    return map(i->a[i],b);
  end proc:
> pro([2,1,3],[1,3,2]);
```

$$[2, 3, 1] \tag{2.1.1}$$

ÜBUNG [03]:
Schreibe ein Programm "inv" zum Invertieren einer Permutation

MATH: Offenbar bilden die invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K ebenfalls eine Gruppe, genannt **generelle lineare Gruppe** des Körpers K vom

Grad n, bezeichnet mit $GL(n, K)$. Hier ist ein Gruppenhomomorphismus

$$P: S_n \to GL(n, K)$$

```
> P:=proc(a::list)
    if {op(a)}<>{$1..nops(a)} then
      error "Falsche Eingabe";
    end if;
    SubMatrix(IdentityMatrix(nops(a)),1..nops(a),a);
  end proc:
> P([2,1,3]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Ein kurzer Test (kein Beweis), ob es sich um einen Homomorphismus handelt.

```
> P([2,1,3]).P([3,2,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

```
> P(pro([2,1,3],[3,2,1]));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Die Botschaft dieses Homomorphimus ist, dass es keinen großen Unterschied macht, ob man $\{1, 2, .., n\}$ oder die Standardbasisvektoren von $K^{n \times 1}$ permutiert.

Signum

MATH: Wir wollen einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{sign}: S_n \to \{\pm 1\},$$

das **Signum**, konstruieren, wobei $(\{\pm 1\}, \cdot)$ multiplikativ als Gruppe zu verstehen ist. sign soll nicht trivial sein in dem Sinne, dass er nicht alle Permutationen auf 1 abbilden soll.

<u>Behauptung</u>: Es gibt höchstens einen derartigen Homomorphismus sign.

Zum Beweis schauen wir uns die Transpositionen in S_n an, also Permutationen, die genau zwei Elemente i, j von $\{1,\ldots, n\}$ vertauschen und jedes andere Element auf sich abbilden. Bezeichnung: (i, j) (Zykelschreibweise).

<u>1. Zwischenbehauptung</u>: Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Dies ist klar für S_2. Angenommen es gilt für S_n. Dann

gilt es auch für S_{n+1}, denn für π mit $\pi(n+1) = n+1$ können wir die Induktionsannahme direkt auf π anwenden und für π mit $\pi(n+1) \neq n+1$ auf $(n+1, \pi(n+1)) \circ \pi$.

Hier ein kurzes Programm, das eine Transposition erstellt:

```
> trans := (n, i, j) -> subs([i=j,j=i], [$1..n]):
> trans(4,2,3);
```

$$[1, 3, 2, 4] \tag{2.2.1}$$

ÜBUNG [04]:

Der Induktionsbeweis zeigt sogar, daß jedes $\pi \in S_n$ sich als Produkt von k Transpositionen schreiben läßt mit $k < n$. Schreibe die folgende Permutation als Produkt von ≤ 7 Transpositionen (Vorsicht bei der Reihenfolge):

```
> a:=[2,3,4,5,1,7,6,8];
```

$$a := [2, 3, 4, 5, 1, 7, 6, 8] \tag{2.2.2}$$

MATH:
Folgerung: Für mindestens eine Transposition muss sign den Wert -1 liefern. (**DENKANSTOSS: Warum?)**

2. Zwischenbehauptung: Sind α, ε Transpositionen in S_n, so existiert ein $\pi \in S_n$ mit

$$\alpha = \pi \circ \varepsilon \circ \pi^{-1}.$$

Folgerung: $\mathrm{sign}(\alpha) = \mathrm{sign}(\varepsilon)$ (**DENKANSTOSS**: Warum?)

Sei $\varepsilon = (a, b)$ und $\alpha = (i, j)$, $a \neq b$, $i \neq j$. Wähle π so, dass $\pi(\mathrm{a}) = i$, $\pi(b) = j$, was auch leicht möglich ist (z.B., im Fall dass a, b, i, j paarweise verschieden sind, das Produkt der Transpositionen (a, i) und (b, j)).
Es gilt nämlich die Formel:

DENKANSTOSS: $\pi \circ (a, b) \circ \pi^{-1} = (\pi(a), \pi(b))$.

MATH: Insgesamt haben wir also gesehen, dass es höchstens einen (**DENKASTOSS**: Warum?) nicht-trivialen Homomorphismus

sign: $S_n \to \{\pm 1\}$

gibt. Im Falle seiner Existenz nimmt dieser auf den Transpositionen den Wert -1 an, auf den Produkten von 2 Transpositionen den Wert +1 und auf den Produkten von k Transpositionen den Wert $(-1)^k$.

MATH: sign: $S_n \to \{\pm 1\}$ existiert und ist gegeben durch

$$\mathrm{sign}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Wir wollen die Homomorphieeigenschaft nicht nachweisen. Sie basiert auf

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_{\pi(i)} - x_{\pi(j)}}{x_i - x_j}$$

wo die x_i beliebige n verschiedene Zahlen (oder Unbestimmte) sind.

ÜBUNG [05]:

Zeige: Die Permutation b kann nicht als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden:

```
> b:=[5,4,3,2,1,9,8,7,6];
```

$$b := [5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6] \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

MATH: $P: S_n \to GL(n, K)$ von ganz oben war ein injektiver Homomorphismus. Sein Bild besteht aus den $n!$ Permutationsmatrizen vom Grad n, die dann natürlich auch eine Gruppe bilden (**DENKANSTOSS:** Warum?). Die **Determinante** einer Permutationsmatrix $P(a)$ kann man jetzt als das Signum von $a \in S_n$ definieren.

```
> Determinant(P(b));
```

$$1 \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Determinante (Eindeutigkeit)

Aufgaben: 2

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Eigenschaften

MATH: Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $B \in V^n$ eine Basis von V. Die (bezüglich B normierte) Determinante von V ist eine Abbildung

$$det_B : V^n \to K : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto det_B(v_1, \ldots, v_n)$$

mit den folgenden drei Eigenschaften:

1) det_B ist **multilinear**, d.h.

$$det_B(x_1, \ldots, x_{i-1}, a \cdot x_i + b \cdot x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) = a \cdot det_B(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + b \cdot det_B(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

für alle $x \in V^n$, $1 \le i \le n$, $x_i' \in V$.

2) det_B ist **alternierend**, d.h. $det_B(x) = 0$ für alle $x \in V^n$, für die $1 \le i \ne j \le n$ existieren mit $x_i = x_j$.

3) det_B ist **normiert**, d.h. $det_B(B) = 1$.

MATH: Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ definieren wir

$$\operatorname{Det}(A) := det_S(A_{-,1}, \ldots, A_{-,n})$$

wobei S die Standardbasis von $K^{n\times 1}$ ist.

Dies ist der gewöhnliche Weg Determinanten einzuführen, aber wir wollen im Moment einen einfacheren und schnelleren Weg wählen. Wir definieren und die Determinante wie folgt:

MATH: Die **Determinante** ist eine Abbildung

$$\mathrm{Det} : K^{n\times n} \to K$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1) Ist $U \in K^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix, d. h.

$$U_{ij} = 0 \text{ für } i < j,$$

so gilt

$$\mathrm{Det}(U) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}.$$

(**Normierung**)

2) Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{Det}(A\cdot B) = \mathrm{Det}(A)\cdot\mathrm{Det}(B)$$

(**Homomorphieeigenschaft**)

Wir gehen nun so vor, dass wir zuerst zeigen, dass die Forderungen 1.) und 2.) zu maximal einer Funktion Det führen (Eindeutigkeit). Natürlich hängt die Funktion auch von n ab, so dass wir besser Det_n gesagt hätten.

DENKANSTOSS: Falls Det existiert, folgt leicht

$$\mathrm{Det}(I_n) = 1,$$

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = (\mathrm{Det}(A))^{-1}$$

und

$$GL(n, K) \to K^{*} : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Det}(A)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, wo mit

$$K^{*} = (K - \{0\}, \cdot\ )$$

die multiplikative Gruppe des Körpers ist.

BEISPIELE:

```
> U:=Matrix(4,4,(i,j)->if i<j then 0 else u[i,j] end if);
```

$$U := \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & 0 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & 0 \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

```
> Determinant(U);
```

$$u_{1,1}\, u_{2,2}\, u_{3,3}\, u_{4,4} \tag{3.1.2}$$

```
> U:=Matrix(4)+1:
  U:=SubMatrix(U,1..4,[2,1,3,4]);
```

$$U := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

```
> Determinant(U);
```

$$-1 \tag{3.1.4}$$

Dies kann man leicht einsehen, denn es gibt eine invertierbare Matrix

```
> T:=DiagonalMatrix([Matrix([[1,1],
                             [0,1]]),1,1]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

mit

```
> T^(-1).U.T;
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

Also folgt

$$\mathrm{Det}(U) = \mathrm{Det}(T)^{-1} \cdot \mathrm{Det}(U) \cdot \mathrm{Det}(T) = \mathrm{Det}(T^{-1} U T) = -1$$

ÜBUNG [06]:

1) Zeige, dass eine Permutationsmatrix $U = P((i, j)) \in GL(n, K)$ einer beliebigen Transposition $(i, j) \in S_n$ immer $\mathrm{Det}(U) = -1$ erfüllt.
(Hinweis: Benutze den Homomorphismus P aus Abschnitt "Gruppenhomomorphismen, S_n, Signum". Reduziere zuerst auf den Fall $(i, j) = (1, 2)$. Wende dann die gerade vorgeführte Idee mit den Blockdiagonalmatrizen an (Matrix T oben).)
2) Folgere $\forall\, \pi \in S_n : \mathrm{Det}(P(\pi)) = \mathrm{sign}(\pi)$.

Berechnung der Determinante

MATH: Wenn eine Determinante existiert (im Sinne der Forderungen 1.), 2.)), dann ist sie eindeutig bestimmt und kann mit dem Gaußschen Algorithmus ausgerechnet werden, denn

a) die Determinante von unteren wie oberen Dreiecksmatrizen ist gleich dem Produkt der Diagonaleinträge,
b) der Gaußalgorithmus faktorisiert eine gegebene Matrix in ein Produkt von unteren und oberen Dreiecksmatrizen sowie einer Permutationsmatrix. (Dies hast du in der Vorlesung unter dem Namen LU-Zerlegung (bzw. LR-Zerlegung) kennengelernt.)

ad a):

```
> U:=Matrix(4,4,(i,j)->if i>j then 0 else u[i,j] end if);
```

$$U := \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

```
> T:=SubMatrix(IdentityMatrix(4),1..4,[4,3,2,1]);T.T;
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

```
> T^(-1).U.T;
```

$$\begin{bmatrix} u_{4,4} & 0 & 0 & 0 \\ u_{3,4} & u_{3,3} & 0 & 0 \\ u_{2,4} & u_{2,3} & u_{2,2} & 0 \\ u_{1,4} & u_{1,3} & u_{1,2} & u_{1,1} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

ad b)
Wir behandeln die folgende Matrix repräsentativ (dies ist kein Beweis):

```
> A:=<<0,1,2,3>|<1,-1,0,1>|<2,1,1,1>|<0,2,1,-1>>;
```

(3.2.4)

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Das Ziel ist es nun, diese Matrix in einer Art Gauß-Algorithmus zuerst als Summe von Matrizen vom Rang 1 darzustellen und aus diesen dann die 3 Faktoren zu erhalten.
Eigentlich würde man nun zunächst die erste Zeile und erste Spalte durch Subtraktion einer Matrix vom Rang 1 zu 0 machen. Dies ist aber nicht möglich, da $A_{11} = 0$ ist. Also nehmen wir uns die erste Spalte und zweite Zeile her.
(Eigentlich ist die Reihenfolge, in der man mit dem Ausräumen vorgeht, relativ egal. Aber der Übersicht wegen versucht man von links und von oben damit anzufangen, *A* auszuräumen.)
Diese 0 wird später dafür sorgen, dass eine Permutationsmatrix eingefügt werden muss.

```
> Z1:=1/A[2,1]*SubMatrix(A,2..2,1..4);S1:=SubMatrix(A,1..4,1..1);
```

$$Z1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

```
> A1:=A-S1.Z1;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

Der hier auftretende Faktor $\frac{1}{A_{2,1}}$ ist der Grund, dass $A_{11} = 0$ ausschließt, dass man zuerst die erste Zeile und erste Spalte auszuräumen kann.
Räume nun die erste Zeile und zweite Spalte aus:

```
> Z2:=1/A1[1,2]*SubMatrix(A1,1..1,1..4);
  S2:=SubMatrix(A1,1..4,2..2);
  A2:=A1-S2.Z2;
```

$$Z2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.7)}$$

Zum Schluss noch die dritte Zeile und dritte Spalte …

```
> Z3:=1/A2[3,3]*SubMatrix(A2,3..3,1..4);
  S3:=SubMatrix(A2,1..4,3..3);
  A3:=A2-S3.Z3;
```

$$Z3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$S3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.8)}$$

… und den letzten Eintrag:

```
> Z4:=1/A3[4,4]*SubMatrix(A3,4..4,1..4);
  S4:=SubMatrix(A3,1..4,4..4);
  A4:=A3-S4.Z4;
```

$$Z4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(3.2.9)

$$A4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

Jetzt kann A als Summe dieser 4 Matrizen $S_i \cdot Z_i$ vom Rang 1 dargestellt werden:

```
> S1.Z1+S2.Z2+S3.Z3+S4.Z4;
  Equal(%,A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{true} \quad (3.2.10)$$

Nun kann man die Zeilen $Z_1, \ldots, Z_4$ in eine Matrix B schreiben und die Spalten $S_1, \ldots, S_4$ in eine Matrix C. Das Produkt aus diesen Matrizen ist dann gerade wieder A:

```
> B:=<Z1,Z2,Z3,Z4>;
  C:=<S1|S2|S3|S4>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & -10 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

```
> Equal(C.B,A);
```

$$\mathit{true} \quad (3.2.12)$$

Wir haben das Ziel schon fast erreicht, denn *A* ist jetzt das Produkt einer Matrix *C* (welche einer unteren Dreicksmatrix nahe kommt) und einer oberen Dreiecksmatrix *B*. Man sieht aber, dass eine Permutation der ersten beiden Spalten von *C* eine obere Dreiecksmatrix ergibt. Dies resultiert genau daraus, dass wir oben nicht mit der ersten Zeile und ersten Spalte anfangen konnten.

```
> Q:=SubMatrix(IdentityMatrix(4),1..4,[2,1,3,4]);
```

(3.2.13)

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

Q ist eine Permutationsmatrix, deren Heranmultiplizieren an A genau die Permutation der ersten beiden Spalten bewirkt. Man erhält:

$C = C \cdot Q \cdot Q^{-1} = C_1 \cdot Q^{-1}$

mit

```
> C1:=C.Q;
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -10 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

Zusammen erhält man:

$A = C \cdot B = C_1 \cdot Q^{-1} \cdot B$

Hierbei ist C_1 jetzt eine untere Dreiecksmatrix, B eine obere Dreicksmatrix und Q^{-1} eine Permutationsmatrix. Da Q aber eine Transposition repräsentiert, gilt $Q^{-1} = Q$:

```
> Q^(-1),Q,Q.Q;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$

Also ist

$A = C_1 \cdot Q \cdot B$:

```
> C1.Q.B;
  Equal(%,A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{true} \tag{3.2.16}$$

Nun kann man ganz einfach die Determinante von A bestimmen. Denn:

$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(C_1) \cdot \mathrm{Det}(Q) \cdot \mathrm{Det}(B)$.

Hierbei ist $\mathrm{Det}(C_1)$ und $\mathrm{Det}(B)$ gerade das Produkt der Diagonaleinträge der Matrizen (da sie Dreiecksmatrizen sind) und $\mathrm{Det}(\mathrm{Q}) = -1$, da Q eine

Transposition darstellt.

```
> mul(C1[i,i],i=1..4)*(-1)*mul(B[i,i],i=1..4);
```

$$-5 \tag{3.2.17}$$

Probe:

```
> Determinant(A);
```

$$-5 \tag{3.2.18}$$

ÜBUNG [07]:

1) Führe die entsprechende Rechnung mit Hilfe des klassischen Gaußschen Algorithmus von Hand durch und gib so eine neue Berechnung der Determinante an.

(Hinweis: Stelle die Zeilenumformungen durch Permutationsmatrizen und Dreiecksmatrizen dar. Alternativ: Überlege was die Determinanten der verwendeten Umformungsmatrizen sind und rechne von Hand.)

2) Unter Benutzung des obigen Verfahrens mit Hilfe der Matrizen vom Rang 1 bestimme die Determinante von **M**
3) Wie zeigt dieses Verfahren, welchen Rang die Matrix hat?

```
> M:=Matrix([[ 1 , 2 , 3 , 4 ],
             [ 2 , 3 , 4 , 5 ],
             [ 7 , 6 , 5 , 4 ],
            [ 10 , 11 , 12 , 13 ]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \tag{3.2.19}$$