Wiederholung: Sheets 1 - 4

ÜBUNG [00]:
Wiederhole die Themen der ersten vier Worksheets. Wir stellen Fragen im Testat.

Primfaktorzerlegung in Hauptidealbereichen & chinesischer Restsatz

Aufgaben: 2

Primfaktorzerlegung in Hauptidealbereichen, chinesischer Restsatz

Als Konsequenz aus dem letzten Abschnitt bekommt man nun die eindeutige Primfaktorzerlgung in einem Hauptidealbereich.

Zuvor nochmals die wichtige Definition:
MATH: Sei R ein Ring, $a, b \in R$. Man sagt a **teilt** b (kurz $a \mid b$), falls $b \in Ra$ (oder äquivalent $Rb \subseteq Ra$) gilt.
Falls $a \mid b$ und $b \mid a$ gilt, dann heißen a, b **assoziiert**.
Ein Element $p \in R$ heißt **prim**, falls für alle $a, b \in R$ gilt:

$$p \mid ab\ 0 \quad p \mid a \quad \text{oder} \quad p \mid b.$$

Offenbar gilt in Integritätsbereichen: Ein primes Element ist irreduzibel.

MATH: Sei R ein Hauptidealbereich und $a \in R$ keine Einheit.
1.) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und nicht assoziierte, irreduzible Elemente $p_1, ..., p_n \in R$ sowie $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$
und eine Einheit $e \in R$ mit

$$a = e \cdot p_1^{k_1} \cdot \ ... \ \cdot p_n^{k_n},$$

kurz eine Primfaktorzerlegung.
2.) Ist

$$a = f \cdot q_1^{l_1} \cdot \ ... \ \cdot q_m^{l_m}$$

eine zweite Primfaktorzerlegung von a, so gilt

$$m = n$$

und nach Umnummerierung der q_i gilt weiter

q_i und p_i sind assoziiert, d. h. sie unterscheiden sich nur um einen Einheitsfaktor, und

$$l_i = k_i \text{ für alle } i = 1, ..., n.$$

Es sei angemerkt, dass für die Existenz einer Primfaktorzerlegung nur noch eine kleine Beweisidee fehlt, nämlich die Tatsache, das man nicht unendlich oft Primfaktoren abdividieren kann. Dies würde zu unendlichen aufsteigenden

Idealketten führen, die deshalb nicht existieren können, weil die Vereinigung einer solchen Kette wieder ein Hauptideal ist.

ÜBUNG [01]:

Zeige, dass *a* mit der obigen Primfaktorzerlegung $a = e \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ im Hauptidealbereich *R* genau

$$(k_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$$

Assoziiertenklassen von Teilern hat. Zeige ferner, dass dies auch die Anzahl der Ideale ist, die *Ra* umfassen.
Bestimme diese Zahl für $a = x^{20} - 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ und für $a = x^{20} - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

DENKANSTOSS: (Alles in Hauptidealbereichen!) Wie liest man von der Primfaktorzerlegung zweier Elemente ab, ob sie teilerfrend sind? Zeige $Ra \cdot Rb$ *(= Rab) =Ra*$\cap Rb$ für *a,b 2 R* teilerfremd.

Die eindeutige Primfaktorzerlegung der Elemente in Hauptidealbereichen hat eine wichtige Konsequenz für die Struktur der Restklassenringe der Hauptidealbereiche.

MATH: Zwei Ideale *I,J* eines Ringes *R* heißen teilerfremd, falls

I+J=R.

Ist *R* ein Hauptidealbereich, so bedeutet dies, dass die Erzeuger der Ideale teilerfremd sind.
Es gilt der berühmte chinesische Restesatz, welcher besagt, dass man im teilerfremden Fall der Restklassenring

$$R/(I \cap J)$$

aus seinen beiden epimorphen Bildern

$$R/I \text{ und } R/J$$

rekonstruieren kann. Die Art der Rekonstruktion ist sehr einfach:

MATH: Seine R_1, R_2 zwei Ringe mit Einselementen $1_1, 1_2$. Dann heißt

$$R_1 \oplus R_2 := \{ (a, b) \mid a \in R_1,\ b \in R_2 \}$$

die **ringdirekte Summe** von R_1 und R_2, wobei die Verknüpfungen komponentenweise definiert sind:

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$$

und

$$(r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) := (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2)$$

mit $r_1, s_1 \in R_1,\ r_2, s_2 \in R_2$.
Damit ist

$$(1_1, 1_2)$$

das Einselement der ringdirekten Summe. Offenbar sind die Projektionen

$$R_1 \oplus R_2 \to R_1 : (r_1, r_2) \mapsto r_1 \quad \text{und} \quad R_1 \oplus R_2 \to R_2 : (r_1, r_2) \mapsto r_2$$

Ringepimorphismen, deren Kerne Hauptideale sind, die von

$$(0_1, 1_2) \quad \text{bzw.} \quad (1_1, 0_2)$$

erzeugt werden. Man beachte, dass das von

$$(0_1, 1_2)$$

erzeugte Hauptideal als Ring offenbar wieder isomorph ist zu R_2 und das von

$$(1_1, 0_2)$$

zu R_1.

Ein Ring, welcher zu einer ringdirekten Summe zweier (nicht trivialer) Ringe isomorph ist, heißt auch ringdirekte Summe.

Wie erkennt man ringdirekte Summen?

MATH: Ist *R* ein Ring und

$$1 = e_1 + e_2$$

eine Zerlgung der Eins in orthogonale Idempotente e_i, d. h.

$$e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2,\ e_1 e_2 = 0,$$

so gilt:

$$R \to R\,e_1 \oplus R\,e_2 : r \mapsto (re_1, re_2)$$

ist ein Isomorphismus von Ringen.

DENKANSTOSS: Wie wird man die ringdirekte Summe von *n* Ringen definieren?

Der chinesische Restsatz besagt nun:

MATH: Sei *R* ein Ring mit zwei teilerfremden Idealen $I, J \trianglelefteq R$, also *I*+*J*=*R*, dann ist

$$R/(I \cap J) \cong R/I \oplus R/J,$$

genauer

$$R/(I \cap J) \to R/I \oplus R/J : r + I \cap J \mapsto (r + I, r + J)$$

ein Ringisomorphismus.

Ist insbesondere *R* ein Hauptidealbereich mit teilerfremden Elementen $a, b \in R$, dann gilt :

$$R/abR \cong R/aR \oplus R/bR \quad .$$

BEISPIEL: $R := \mathbb{Z}$,

```
> a:=16;b:=9;
```

$$a := 16$$

$$b := 9 \tag{2.1.1}$$

```
> igcdex(a,b, 's', 't');
```

$$1 \tag{2.1.2}$$

```
> e2:=a*s;e1:=b*t;
```

$$e2 := 64$$

$$e1 := -63 \tag{2.1.3}$$

```
> e1 mod 16; e1 mod 9;
```

$$1$$
$$0 \qquad (2.1.4)$$

```
> e2 mod 16; e2 mod 9;
```

$$0$$
$$1 \qquad (2.1.5)$$

Wir können mit dieser Ausgangsinformation nun leicht das lineare Kongruenzensystem

$$x \equiv x_a \pmod{a},\; x \equiv x_b \pmod{b}$$

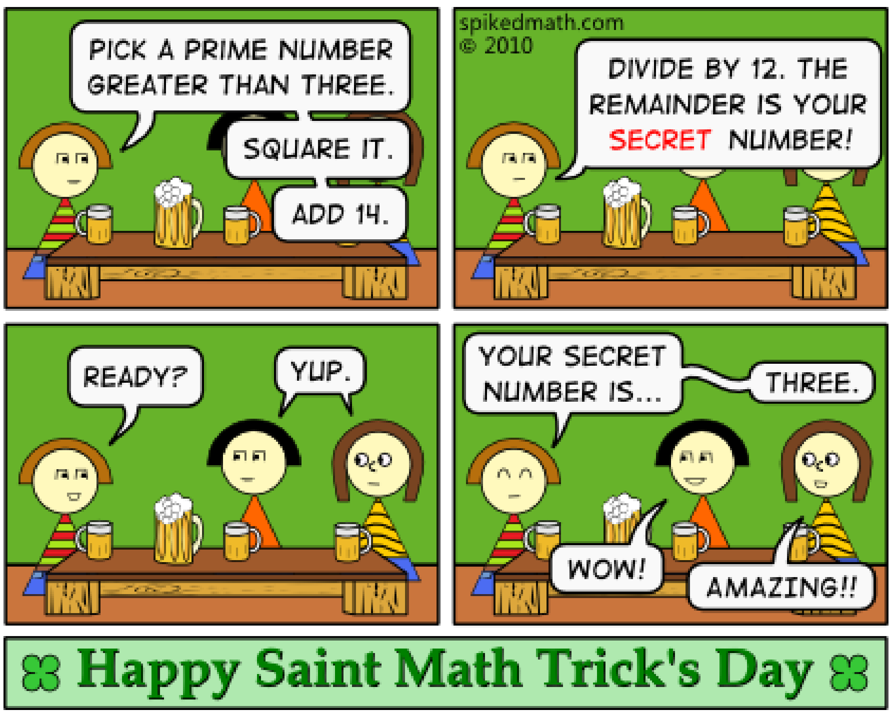
lösen, wobei $x_a, x_b \in \mathbb{Z}$ beliebig vorgeben sind. Dies bedeutet,

$$x - x_a \in a\mathbb{Z},\, x - x_b \in b\mathbb{Z}.$$

Die Lösungen bilden dann nach dem chinesischen Restsatz eine Restklasse nach $ab\mathbb{Z}$:

$$(x_a + a\mathbb{Z}) \bigcap (x_b + b\mathbb{Z}) = e_1 x_a + e_2 x_b + ab\mathbb{Z}$$

BEISPIEL:



ÜBUNG [02]:

Man bestimme alle Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit

$$p \equiv x \left(\mathbf{mod}\ (x^2-1)^2\right),$$
$$p \equiv x + 1 \left(\mathbf{mod}\ (x^2-4)^2\right),$$

$$p \equiv x+2 \ (\mathbf{mod}\ (x^2-9)^2).$$

(Hinweis: Jedes der drei Polynome $(x^2-i)^2$ ist teilerfremd zu dem Produkt der beiden anderen.)

Begründe darüberhinaus, dass diese drei Bedingungen äquivalent damit sind, dass p und die Ableitung p' an den Punkten $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ bestimmte Werte annehmen. Gib diese Werte an.

Das Riemannintegral

Aufgaben: 5

```
> restart;
  with(plots):
```

Riemannsche Unter- und Obersummen

MATH: Eine **Zerlegung** eines abgeschlossenen Intervalles $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ ist eine endliche Folge

$$z = (z_i \mid i = 0,.., n) \quad \text{mit} \quad a = z_0 < z_1 < ... < z_n = b.$$

Die Zerlegung heißt **äquidistant**, falls

$$z_{i+1} - z_i = \frac{(b-a)}{n} \quad \text{ist für alle} \quad i = 0,..., n-1.$$

MATH: Für eine beschränkte reelle Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, eine Zerlegung

$$Z\colon a = z_0 < z_1 < ... < z_n = b \quad \text{von } [a, b]$$

und eine Folge ξ von Zwischenpunkten $\xi_i \in [z_i, z_{i+1}]$ definiert man eine **Riemannsche Summe**

$$S(f, Z, \xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(z_{i+1} - z_i),$$

welche zwischen der **Untersumme**

$$U(f, Z) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (z_{i+1} - z_i)$$

und der **Obersumme**

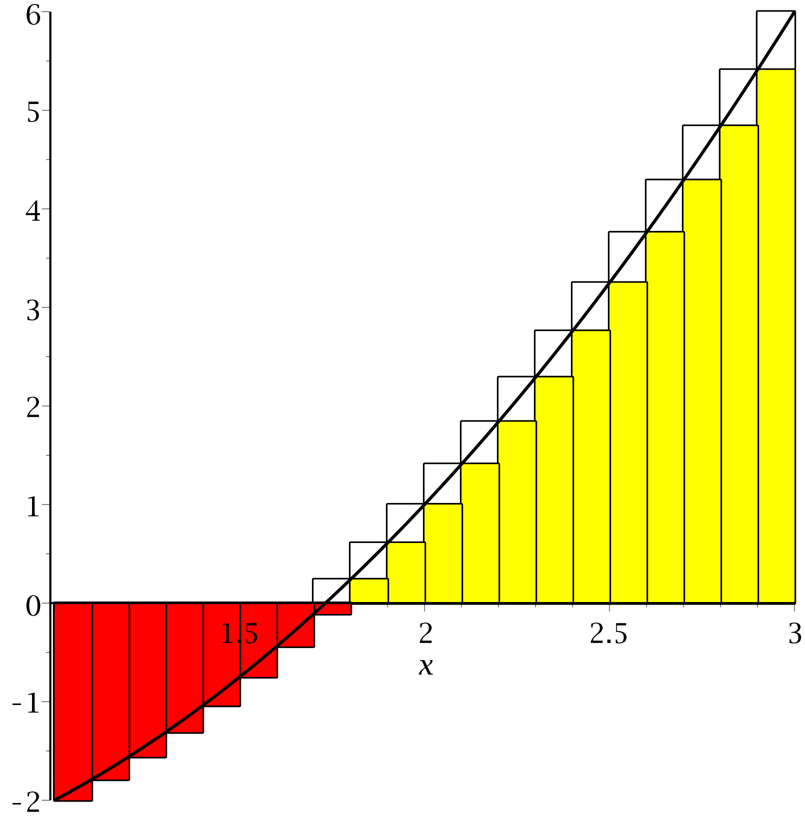
$$O(f, Z) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (z_{i+1} - z_i)$$

liegt, wobei $m_i := \inf(f(x) \mid x \in [z_i, z_{i+1}])$ und $M_i := \sup(f(x) \mid x \in [z_i, z_{i+1}])$ ist.

MAPLE: Hier ist eine Funktion, die die Definition der Unter- und Obersummen (gelb-rot bzw. weiß) für monoton steigende Funktionen und äquidistante Partitionen visualisiert:

```
> Rie:=proc(f,a,b,n::posint)
  local z,L1,L2,i;
    z:=map(i->a+i*(b-a)/n,[$0..n]);
```

```
   L1:=map(i->
     if f(z[i])>0 then
      polygonplot(
        [[z[i],0],[z[i+1],0],[z[i+1],f(z[i])],[z[i],f(z[i])]
],
        color=yellow)
     else
      polygonplot(
        [[z[i],0],[z[i+1],0],[z[i+1],f(z[i])],[z[i],f(z[i])]
],
        color=red)
     end if
     ,[$1..n]);
   L2:=map(i->
     polygonplot(
       [[z[i],0],[z[i+1],0],[z[i+1],f(z[i+1])],[z[i],f(z[i+1]
)]],
      color=white)
     ,[$1..n]);
   display(L1,L2,plot(f(x),x=a..b,color=black))
  end proc:
> Rie(unapply(x^2-3,x),1,3,20);
```



DENKANSTOSS: Betrachte den Fall positiver monoton steigender Funktionen und den negativer monoton steigender Funktionen getrennt an Hand einiger Beispiele.

ÜBUNG [03]:

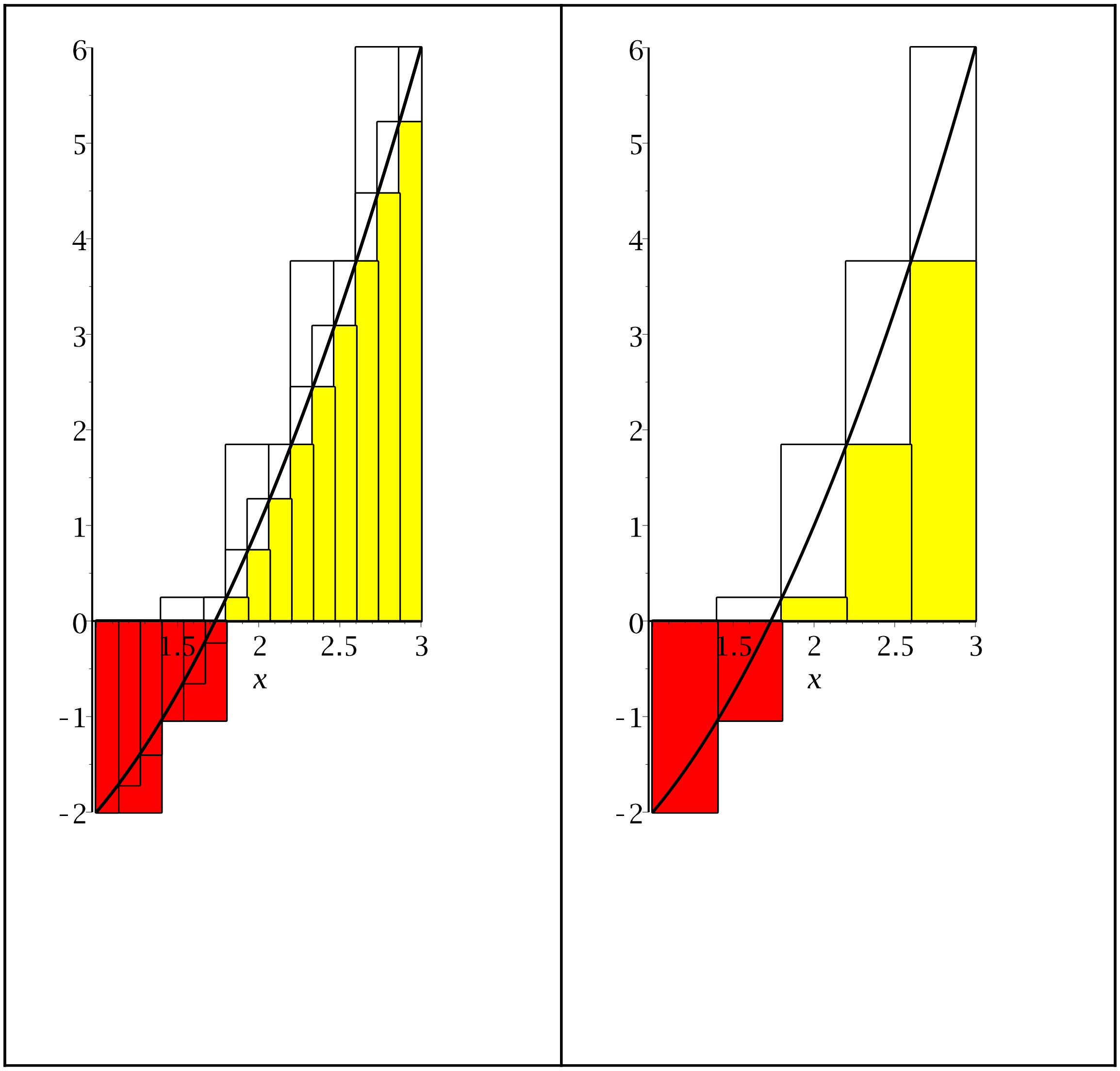
1) Modifiziere das Programm **Rie**, so daß es für monoton fallende Funktionen funktioniert.
2) Warum lassen sich Ober- und Untersummen für nicht monotone Funktionen nicht so einfach visualisieren?

Verfeinerungen der Zerlegung

MATH: Eine Verfeinerung einer Zerlegung $z = (z_i \mid i = 0,.., n)$ ist eine Zerlegung $z' = (z_i' \mid i = 0,.., k)$, welche die Zerlegung z als Teilfolge hat. Damit folgt sofort: $k \geq n$.

Hier ist noch eine Demonstration, die die Namenswahl erklärt.

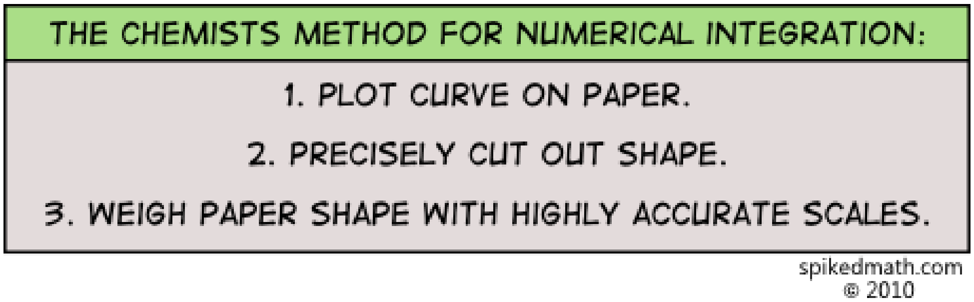
```
> aa:=array(1..1,1..2):
> aa[1,1]:=display(Rie(unapply(x^2-3,x),1,3,15),Rie(unapply
  (x^2-3,x),1,3,5)):
> aa[1,2]:=display(Rie(unapply(x^2-3,x),1,3,5)):
> display(aa);
```



ÜBUNG [04]:

1) Man gebe (inspiriert durch die Diagramme) den genauen Wert der Differenz zwischen Ober-und Untersumme bei monoton steigenden Funktionen an, wenn eine äquidistante Zerlegung vorliegt.
2) Zeige: Bei monoton steigenden Funktionen geht die Differenz zwischen Ober- und Untersumme gegen Null, wenn die maximale Intervallänge der Partitionen gegen Null geht und eine äquidistante Zerlegung vorliegt.

Das Riemannintegral



MATH: Falls das Supremum der Untersummen gleich dem Infimum der Obersummen ist, jeweils über **alle** Partitionen des Intervalles $[a, b]$ genommen, so heißt die Funktion f **Riemann-integrierbar** auf $[a, b]$. Der gemeinsame Wert heißt das **(bestimmte) Integral** von f über $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar.
Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Bei Riemann-integrierbaren Funktionen kann man das Integral über irgendeine Folge von Partitionen ausrechnen, solange die maximale Intervallänge gegen Null konvergiert.

Wir fangen aber mit einem einfacheren Beispiel an:

BEISPIEL:

```
> int(x^2,x=0..3);
```

$$9 \tag{3.3.1}$$

```
> limit(1/n*sum((i/n)^2,i=1..3*n),n=infinity);#Obersumme
  limit(1/n*sum((i/n)^2,i=0..3*n-1),n=infinity);#Untersumme
```

$$9$$

$$9 \tag{3.3.2}$$

ÜBUNG [05]:

Man bestimme *auf Grund der bisherigen Kenntnisse in den Worksheets*

$$\int_1^2 x^3\,dx\ .$$

Hinweis: Die folgende Formel darf benutzt werden:

```
> sum(i^3,i=0..n);
```

$$\frac{1}{4}\,(n+1)^4 - \frac{1}{2}\,(n+1)^3 + \frac{1}{4}\,(n+1)^2 \tag{3.3.3}$$

MATH: Zum Abschluss dieser Einführung noch eine Funktion, die zwar beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar ist:

$f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für rationales x und $f(x) = 0$ für irrationales x.

Da sowohl die rationalen Zahlen als auch die irrationalen Zahlen dicht in = liegen, sind die Untersummen allesamt gleich 0 und die Obersummen allesamt gleich 1.

DENKANSTOSS: Unterscheiden sich zwei beschränkte Funktionen auf $[a, b]$ nur durch ihre Werte an endlich vielen Stellen, so ist die eine genau dann integrierbar, wenn die andere integrierbar ist. In diesem Fall sind die Integrale gleich.

Stammfunktionen

MATH: Sei

$$f: I \to \mathbb{R}$$

eine Funktion auf dem offenen Intervall I. Eine Funktion

$$F: I \to \mathbb{R}$$

heißt **Stammfunktion** von *f*, falls *F* differenzierbar mit Ableitung *f* ist. Mit anderen Worten, die Stammfunktionen *F* von *f* sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$F' = f\ .$$

Eine Stammfunktion muss aber nicht in jedem Fall existieren.

MATH: Hat *f* eine Stammfunktion *F*, so sind alle Stammfunktionen von *f* gegeben durch

$$F_c : x \to F(x) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig. (Man beachte, der Definitionsbereich war ein Intervall. Wie würde die Antwort heißen, wenn der Definitionsbereich die disjunkte Vereinigung zweier Intervalle wäre?) Man nennt die Gesamtheit der Stammfunktionen von *f* auch das **unbestimmte Integral** von *f*.

ÜBUNG [06]:

1) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ für $a_i \in \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Bestimme alle Stammfunktionen von *f*.

2) Zeige, dass

```
> f:=x->piecewise(x<0,0,x>=0,1);
```

$$f := x \to piecewise(x < 0, 0, 0 \le x, 1) \quad (3.4.1)$$

keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$ hat.

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Der von Newton und Leibniz gefundene Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung hat die hohe Kunst der Flächeninhaltsberechnungen des 16. Jahrhunderts und davor, bei der nur die besten etwas ausrichten konnten, zu einer Fingerübung für Gymnasiasten degradiert. Inzwischen kann man auch einfach MAPLE befragen. Um ein tieferes Verständnis kommt man aber auch mit MAPLE nicht herum. Der zentrale Trick besteht darin, nicht nur wie bislang das Integral über das feste Intervall $[a, b]$ zu nehmen, sondern über alle Intervalle der Form $[a, x]$, die in $[a, b]$ enthalten sind.

MATH: Betrachte folgende Mengen von Funktionen (alle sind Vektorräume über $\mathbb{R}$)

$$\mathrm{C}([a, b]) = \mathrm{C}^0([a, b]) := \{ f: [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$
$$\mathrm{C}^1([a, b]) := \{ f: [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar } \}$$

$$\mathrm{I}([a, b]) := \{ f: [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrierbar } \}.$$

Mit den Begriffen, die wir in der linearen Algebra lernen werden, ist klar, dass es sich um Teilräume des Raumes $\mathbb{R}^{[a, b]}$ handelt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

MATH: Sei $f \in \mathrm{I}([a, b])$, d. h. f sei integrierbare Funktionen auf $[a,b]$. Dann gilt

$f \in \mathrm{I}([a, x])$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\mathrm{F}: [a, b] \to \mathbb{R} : x \to \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

ist wohldefiniert und heißt **Integralfunktion** von f.

BEISPIEL:

```
> f:= x-> signum(x);
```

$$f := x \to \mathrm{signum}(x) \quad \textbf{(3.5.1)}$$

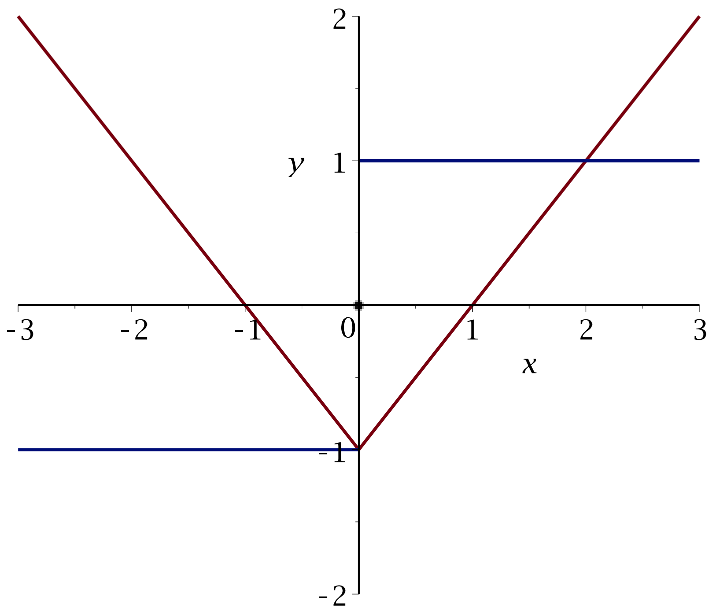
```
> F:=x->int(f(u),u=-1..x);
```

$$F := x \to \int_{-1}^{x} f(u)\, \mathrm{d}u \quad \textbf{(3.5.2)}$$

```
> simplify(F(x));
```

$$\begin{cases} -1 - x & x \le 0 \\ -1 + x & 0 < x \end{cases} \quad \textbf{(3.5.3)}$$

```
> plot({signum(x),F(x)},x=-3..3,y=-2..2,discont=true);
```



DENKANSTOSS: Was passiert, wenn wir einen anderen Punkt a' für die Definition von F wählen?

MATH: (**Fundamentalsatz, 1. Teil**):
1) Für $f \in \mathrm{I}([a, b])$ ist die Integralfunktion F stetig auf $[a, b]$, also $F \in \mathrm{C}([a, b])$:

$$\int : \quad \mathrm{I}([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b]) : f \mapsto F := \left(x \mapsto \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \right)$$

ist eine wohldefinierte (lineare) Abbildung.
2) Für $f \in \mathrm{C}([a, b])$ ist die Integralfunktion F differenzierbar mit Ableitung $F' = f$:

$$\int : \quad \mathrm{C}([a, b]) \to \mathrm{C}^1([a, b]) : f \mapsto F := \left(x \mapsto \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \right)$$

ist eine wohldefinierte (lineare) Abbildung mit der Ableitung

$$' : \mathrm{C}^1([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b]) : F \mapsto F'$$

als (linearer) Linksinverser.

Kommentar: Beide Teile sagen: Integrieren macht Funktionen **glatter**: 1) integrierbare werden stetig; 2) stetige werden 1 Mal stetig differenzierbar. Umformulierung von 2):
2'):

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(u) \, \mathrm{d}u \right) = f(x)$$

für alle $x \in [a, b]$.

Beispiel:

```
> f:=x->sqrt(1-x^2):f(x);
```

$$\sqrt{-x^2+1} \qquad (3.5.4)$$

```
> Diff(Int(f(u),u=0..x),x)=simplify(diff(int(f(u),u=0..x),x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x \sqrt{-u^2+1}\,\mathrm{d}u\right) = \sqrt{-x^2+1} \qquad (3.5.5)$$

MAPLE hat dies sogar als allgemeine Weisheit eingebaut:

```
> diff(Int(g(u),u=0..x),x);
```

$$g(x) \qquad (3.5.6)$$

MATH: Da Differenzieren $\mathrm{C}^1([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b])$ linksinvers zum Integrieren $\mathrm{C}([a, b]) \to \mathrm{C}^1([a, b])$ ist, sagen unsere Prinzipien aus dem Mengen-Worksheet:

Differenzieren $\mathrm{C}^1([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b])$ ist surjektiv

und

Integrieren $\mathrm{C}([a, b]) \to \mathrm{C}^1([a, b])$ ist injektiv.

Mit anderen Worten: Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist Ableitung und verschiedene stetige Funktionen haben auch verschiedene Integralfunktionen.

Aus dem Abschnitt "Stammfunktionen" wissen wir noch:

MATH: Ist $f \in \mathrm{C}([a, b])$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$, so heißt jede Funktion $\mathrm{G} \in \mathrm{C}^1([a, b]))$ mit Ableitung $G' = f$ **Stammfunktion** von *f*. Insbesondere ist die Integralfunktion *F* eine Stammfunktion von *f*. Mit anderen Worten, die Stammfunktionen von *f* bilden die Faser von *f* unter Differentiation $\mathrm{C}^1([a, b]) \to \mathrm{C}([a, b]))$. Alle *f*-Stammfunktionen unterscheiden sich von der Integralfunktion *F* durch eine additive Konstante. Also:

Fundamentalsatz (2. Teil): Ist F eine Stammfunktion von $f \in \mathrm{C}([a, b])$, so gilt insbesondere

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Die Flächeninhaltsberechnungen, die in der Einleitung dieses Abschnittes angesprochen wurden, haben sich auf die Aufgabe reduziert, eine Stammfunktion zu finden, also eine Lösung der Differentialgleichung $F' = f$ auf $[a, b]$ zu finden.

DENKANSTOSS: Will man kurz sagen, dass Differenzieren und Integrieren invers zueinander sind, kann man $\mathrm{C}^1([a, b])$ entweder durch die Teilmenge (präziser den Teilraum)

$$\{G \in \mathrm{C}^1([a, b|)) \mid G(a) = 0\}$$

ersetzen oder, mit der linearen Algebra durch den **Faktorraum**

$$C^1([a,b]) \,/\, \{\text{ konstante Funktionen } : [a,b] \to \mathbb{R}\}.$$

Ersteres ist eine saubere Lösung, zweiteres eine bequeme Lösung, die auch MAPLE wählt: Die Stammfunktionen einer Funktion $f \in C([a,b])$ werden als eine Funktion angesehen, die bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. (Diese bis auf additive Konstante definierten Funktionen sind die Elemente des obigen Faktorraumes.)

MAPLE: Maple bestimmt Integrale symbolisch, indem es eine Stammfunktionen sucht. Der Maple-Befehl für die Stammfunktion ist entsprechend:

```
> f:=`f`:
> int(f(x),x);
```

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.5.7}$$

```
> Int(x^2,x)=int(x^2,x);
```

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 \tag{3.5.8}$$

```
> dsolve(diff(G(x),x)=x^2,G(x));
```

$$G(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + \_C1 \tag{3.5.9}$$

Man sieht, Maple unterdrückt die Integrationskonstante bei der Stammfunktion und wählt eine Stammfunktion nach seinem Gusto aus.

ÜBUNG [07]:

1) Fasse zusammen, warum der Fundamentalsatz wichtig ist. Warum kann man mit Stammfunktionen eine die Fläche unter gewissen (welche?) Kurven ausrechnen?
2) Leite eine kompliziert aussehende Identität her durch Integration der Ableitung der Funktion $\sin(x)^2 \cdot \left(\exp(x^2) + 1\right) + \cos(x)^2$.
Hinweis: Der Maple-Befehl `int` ist erlaubt. Teste, ob auch wirklich eine Identität vorliegt, weil ja immer noch die Integrationskonstante unklar ist.