Jordan-Normalform

Aufgaben: 8

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Ähnlichkeit von Matrizen

MATH: Es sei K ein Körper. Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich** oder **konjugiert**, unter $GL(n, K)$, falls ein $g \in GL(n, K)$ existiert mit $A = gBg^{-1}$, d.h. A, B liegen in derselben Bahn unter der Operation

$$GL(n, K) \times K^{n \times n} \to K^{n \times n} : (g, C) \mapsto gCg^{-1}.$$

DENKANSTOSS: Formuliere obige Definition für Endomorphismen.

BEISPIEL: Basiswechsel

Es sei $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 3 über den reellen Zahlen. Wir betrachten die formale Differentation Δ als Endomorphismus von V. Dann lässt sich Δ bezüglich der beiden Basen B_1 und B_2 darstellen.

```
> B1:=[1,x,x^2,x^3];
  B1_Delta_B1:=Matrix(4,4,(i,j)->coeff(diff(B1[j],x),x,i-1));
```

$$B1 := [1, x, x^2, x^3]$$

$$B1\_Delta\_B1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

```
> B2:=map(n->expand((x+n)^3),[$0..3]);
```

$$B2 := [x^3, x^3 + 3x^2 + 3x + 1, x^3 + 6x^2 + 12x + 8, x^3 + 9x^2 + 27x + 27] \quad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> B2_Delta_B2:=Matrix([[-11/6,-1/3,1/6,-1/3],[3,-1/2,-1,3/2],
  [-3/2,1,1/2,-3],[1/3,-1/6,1/3,11/6]]);
```

$$B2\_Delta\_B2 := \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Wir stellen nun die Basiswechselmatrix zwischen den beiden Basen auf und verifizieren, dass die Matrizen ähnlich sind.

```
> T:=Matrix(4,4,(i,j)->coeff(B2[j],x,i-1));
```

$$T:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

```
> T^(-1).B1_Delta_B1.T=B2_Delta_B2;
  T^(-1).B1_Delta_B1.T-B2_Delta_B2;
  Equal(T^(-1).B1_Delta_B1.T,B2_Delta_B2);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

true (1.1.5)

ÜBUNG [01]:

Welche der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ sind ähnlich zueinander?

```
A1,A2,A3,A4,A5:=Matrix([[1,2,2],[2,2,0],[2,0,0]]),Matrix([
[1,2,1],[2,1,1],[1,1,2]]),Matrix([[2,0,2],[0,0,2],[2,2,1]]
),Matrix([[2,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]),Matrix([[1,1,2],[1,2,
1],[2,1,1]]);
```

$$A1, A2, A3, A4, A5:=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1.6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Im Allgemeinen ist es allerdings schwer zu entscheiden, ob zwei Matrizen zueinander ähnlich sind. Bevor wir mit der Jordan-Normalform eine Möglichkeit dies zu tun kennen lernen, benötigen wir noch ein kleines Hilfsmittel.

DENKANSTOSS: Welche Eigenschaften von Matrizen kennst du bereits, die erfüllt sein müssen, damit diese ähnlich sein können?

Hauptraumzerlegung

MATH: Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix und $\mu_A(x) := \prod_{i=1}^{l} p_i^{m(i)}$ mit $m(i)$, $l \in \mathbb{N}$ die Zerlegung des Minimalpolynoms in normierte, irreduzible und paarweise verschiedene Polynome p_i. Dann existiert eine Zerlegung in die p_i-**Haupträume** $Kern\left(p_i^{m(i)}(A)\right)$, welche alle A-invariant sind:

$$K^{n \times 1} = \bigoplus_{i=1}^{l} Kern\left(p_i^{m(i)}(A)\right).$$

Ferner gilt $Kern\left(p_i^{m(i)}(A)\right) = Bild\left(q_i(A)\right)$, wobei $q_i := \prod_{j \neq i}^{l} p_j^{m(j)}$ ist.

Die Projektion der Zerlegung sind durch $\pi_i := \left(a_i\, q_i\right)(A)$ gegeben, wobei $a_i \in K[x]$ mit $1 = \sum_{i=1}^{l} a_i \cdot q_i$ z.B. durch den Euklidischen Algorithmus gegeben sind.

BEISPIEL: Wir betrachten die folgende Matrix $A \in \mathbb{Q}^{7 \times 7}$.

```
> A:=CompanionMatrix(x^7-4*x^6+9*x^5-10*x^4+4*x^3+8*x^2-12*x+8);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2.1)$$

Zuerst bestimmen und faktorisieren wir das Minimalpolynom. Hierbei ist wichtig, dass wir später den Exponenten $m(2) = 2$ nicht vergessen. Ferner bestimmen wir die Polynome q_i:

```
> factor(MinimalPolynomial(A,x));#störe dich nicht an der
  Reihenfolge, Maple ordnet die Faktoren willkürlich
  p1:=x+1;
  p2:=x^2-2*x+2;
  p3:=x^2-x+2;
  q1:=p2^2*p3;
  q2:=p1*p3;
  q3:=p1*p2^2;
```

$$(x+1)\,(x^2-x+2)\,(x^2-2\,x+2)^2$$

$$p1 := x+1$$

$$p2 := x^2-2\,x+2$$

$$p3 := x^2-x+2$$

$$q1 := (x^2-2\,x+2)^2\,(x^2-x+2)$$

$$q2 := (x+1)\,(x^2-x+2)$$

$$q3 := (x+1)\,(x^2-2\,x+2)^2 \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

Nun rechnen wir die Zerlegung der 1 mittels Euklidischem Algorithmus aus:

```
> gcdex(p1,q1,x,'b','a1'):
  gcdex(p2^2,q2,x,'b','a2'):
  gcdex(p3,q3,x,'b','a3'):
```

Und testen sie:

```
> a1*q1+a2*q2+a3*q3:
  expand(%);
```

$$1 \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

Damit sind wir nun in der Lage die Projektionen π_i zu bestimmen:

```
> #Dieses Programm setzt A in p ein
  Eins:=proc(p::polynom, A::Matrix)
    simplify(subs(x=A,expand(p)));
> end proc:
> pi1:=Eins(a1*q1,A);
```

(1.2.4)

$$\pi 1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{6}{25} & \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} \end{bmatrix} \qquad (1.2.4)$$

Wir testen die Projektionseigenschaft:

```
> pi1^2-pi1;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.2.5)$$

```
> pi2:=Eins(a2*q2,A);
  pi3:=Eins(a3*q3,A);
```

$$\pi 2 := \begin{bmatrix} \frac{48}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{52}{25} & -\frac{48}{25} & \frac{48}{25} & \frac{152}{25} & \frac{48}{25} \\ -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{16}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} & -\frac{36}{5} & \frac{16}{5} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{18}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{32}{25} & \frac{68}{25} & \frac{32}{25} & -\frac{132}{25} \\ \frac{31}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{44}{25} & -\frac{31}{25} & \frac{56}{25} & \frac{144}{25} & \frac{56}{25} \\ -\frac{89}{100} & \frac{57}{50} & \frac{59}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{91}{25} & -\frac{134}{25} & \frac{84}{25} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{14}{5} & \frac{16}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{1}{100} & \frac{13}{50} & \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{19}{25} & -\frac{6}{25} & \frac{56}{25} \end{bmatrix}$$

$$\pi 3 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 & -2 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -2 & -6 & -2 \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

Nun bestimmen wir Basen der Haupträume (Achtung bei p_2):

```
> BH1,BH2,BH3:=NullSpace(Eins(p1,A)),NullSpace(Eins(p2^2,A)),
  NullSpace(Eins(p3,A));
```

$$BH1, BH2, BH3 := \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ -20 \\ 28 \\ -24 \\ 14 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ -4 \\ 12 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

Wir testen kurz, ob das Bild der Projektionen gleich den soeben bestimmten

Teilräumen ist. Dafür bestimmen wir zuerst das Bild von π_1

```
> ColumnSpace(pi1);
```

$$\left[\left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -3 \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{array}\right]\right] \quad (1.2.8)$$

und vergleichen es mit der Basis BH_1

```
> Matrix([op(NullSpace(Eins(p1,A))),op(ColumnSpace(pi1))]);
  Rank(%);
```

$$\left[\begin{array}{cc} 8 & 1 \\ -20 & -\frac{5}{2} \\ 28 & \frac{7}{2} \\ -24 & -3 \\ 14 & \frac{7}{4} \\ -5 & -\frac{5}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$1 \quad (1.2.9)$$

Matrix hat Rang 1, also ist alles so wie erwartet. Der Vollständigkeit halber noch die restlichen Tests:

```
> Matrix([op(NullSpace(Eins(p2^2,A))),op(ColumnSpace(pi2))]);
  Rank(%)=nops(NullSpace(Eins(p2^2,A)));
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{16} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$4 = 4 \tag{1.2.10}$$

```
> Matrix([op(NullSpace(Eins(p3,A))),op(ColumnSpace(pi3))]);
  Rank(%)=nops(NullSpace(Eins(p3,A)));
```

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$2 = 2 \tag{1.2.11}$$

Nun können wir noch den Basiswechsel bei der Matrix A durchführen und sollten eine Blockdiagonalmatrix erhalten.

```
> T:=Matrix([op(BH1),op(BH2),op(BH3)]);
  T^(-1).A.T;
```

$$T := \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ -20 & -4 & -1 & 2 & 1 & -8 & -4 \\ 28 & -1 & 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -24 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \\ 14 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -3 \end{bmatrix} \tag{1.2.12}$$

DENKANSTOSS: Erkläre das folgende "Wunder".

```
> T.DiagonalMatrix([1$1,0$4,0$2]).T^(-1)-pi1;
  T.DiagonalMatrix([0$1,1$4,0$2]).T^(-1)-pi2;
  T.DiagonalMatrix([0$1,0$4,1$2]).T^(-1)-pi3;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.13}$$

ÜBUNG [02]:

Gib eine Matrix T an, welche die Matrix B über dem Körper $<$ der rationalen Zahlen mit Blöcken möglichst kleinen Grades auf Blockdiagonalgestalt konjugiert. (Hinweis: Der Befehl **factor** kann benutzt werden.)

```
> B:=CompanionMatrix(x^10-4*x^9-4*x^8+12*x^7+12*x^6+32*x^5
  -48*x^4-48*x^3-64*x^2-64*x+256);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -256 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Zyklische Vektoren

MATH: Es sei $\alpha \in End(V)$ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V. Ein Vektor $v \in V$ heißt **zyklischer Vektor** von V (bzgl. α), falls $\langle v \rangle_\alpha := K[\alpha](v) = V$ gilt. Falls ein solcher existiert, so heißt V **zyklischer Vektorraum** (bzgl. α).

BEISPIEL:

```
> A:=Matrix([[1,2,1,-1],[-1,-1,1,0],[0,-1,-6,3],[0,-2,-12,6]])
  ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -12 & 6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

Wir behaupten der folgende Vektor sei ein zyklischer:

```
> v:=Vector([2,-2,-1,-1]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

Dies testen wir:

```
> map(i->A^i.v,[$0..3]);
  Matrix(%);
  Rank(%);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \\ -16 \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -9 & 6 \\ -2 & -1 & 8 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & -8 \\ -1 & 10 & 2 & -16 \end{bmatrix}$$

$$4 \quad (1.3.3)$$

DENKANSTOSS: Warum genügt es die Potenzen von A bis hin zu A^3 zu nehmen?

Leider sind nicht alle Vektoren zyklisch, so ist zum Beispiel nur die Hälfte der Standardbasisvektoren in diesem Fall zyklisch:

```
> B:=[Vector([1,0,0,0]),Vector([0,1,0,0]),Vector([0,0,1,0]),
  Vector([0,0,0,1])];
  for e in B do
  Matrix(map(i->A^i.e,[$0..3])):
  Rank(%);
  od;
```

$$B := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 8 \\ 0 & -12 & -2 & 16 \end{bmatrix}$$

4

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

4 **(1.3.4)**

ÜBUNG [03]:

Gib eine Basis an, sodass der Endomorphismus gegeben durch A durch die Begleitmatrix des Minimalpolynoms von A dargestellt wird.

ÜBUNG [04]:

Eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ heißt **nilpotent**, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $B^k = 0$.
1.) Zeige, dass $k \leq n$ gewählt werden kann.
2.) Gib für $n = 5$ eine nilpotente Matrix B und einen Vektor v an, so dass $K^{5 \times 1}$ bezüglich B zyklisch von v erzeugt wird.

WICHTIG: Durch die Hauptraumzerlegung motiviert nehmen wir im Folgenden stets an, dass das Minimalpolynom nur einen einzigen irreduziblen Faktor p besitzt.

DENKANSTOSS: Warum genau ist die Annahme gerechtfertigt?

Nun haben wir ein leichtes Kriterium, um zu entscheiden, ob V zyklisch ist:

MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ für $p \in K[x]$ irreduzibel. Definiere $d := Grad(p)$ und $\nu := p(\alpha)$. Dann sind äquivalent:

1) V ist zyklisch bezüglich α.
2) $Kern(\nu)$ hat Dimension d über K.
3) ν hat Rang $dim(V) - d$.
4) $\mu_\alpha = \chi_\alpha$
5) Sämtliche α-invarianten Teilräume von V sind gegeben durch $\langle \nu^i(V) \rangle_\alpha = Bild(\nu^i)$ für $i = 0, 1, ..., m$.

Insbesondere die α-invarianten Teilräume linear durch Inklusion geordnet.

BEISPIEL:

```
> A:=Matrix([[-11,0,23,22],[-9,-1,21,21],[-8,2,13,12],[4,-2,
  -5,-5]]);
  MinimalPolynomial(A,x);
  CharacteristicPolynomial(A,x);
  factor(%);
  nu:=Eins(x+1,A);
```

$$A := \begin{bmatrix} -11 & 0 & 23 & 22 \\ -9 & -1 & 21 & 21 \\ -8 & 2 & 13 & 12 \\ 4 & -2 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(x+1)^4$$

$$\nu := \begin{bmatrix} -10 & 0 & 23 & 22 \\ -9 & 0 & 21 & 21 \\ -8 & 2 & 14 & 12 \\ 4 & -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

Wir sind also im zyklischen Fall.

```
> nu:=Eins(x+1,A);
  NullSpace(nu);
```

$$\nu := \begin{bmatrix} -10 & 0 & 23 & 22 \\ -9 & 0 & 21 & 21 \\ -8 & 2 & 14 & 12 \\ 4 & -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}-7\\-6\\-4\\1\end{bmatrix}\right\} \quad (1.3.6)$$

Wir haben Glück und der erste Standardbasisvektor ist ein zyklischer Erzeuger.

```
> v:=Vector([1,0,0,0]);
  Matrix(map(i->A^i.v,[$0..3])):Rank(%);
```

$$v := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$4 \quad (1.3.7)$$

Wir bilden die zyklische Basis und stellen fest, dass der Wechsel zu dieser Basis A in eine besonders hübsche Form bringt.

```
> B:=map(i->nu^i.v,[$0..3]);
  T:=Matrix(B);
  T^(-1).A.T;
```

$$B := \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-10\\-9\\-8\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\6\\-2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-42\\-36\\-24\\6\end{bmatrix}\right]$$

$$T := \begin{bmatrix}1 & -10 & 4 & -42\\0 & -9 & 6 & -36\\0 & -8 & -2 & -24\\0 & 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

Dies war aber kein Zufall.

MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ für $p \in K[x]$ irreduzibel. Definiere $d := Grad(p)$ und $\nu := p(\alpha)$ sowie $n := m \cdot d = Dim(V)$. Ist v ein zyklischer Erzeuger von V, so ist $B \in V^n$ definiert durch

$$B_{r+d\cdot i} := \alpha^{r-1}\nu^{i}(v) \quad \text{für } 1 \le r \le d \text{ und } 0 \le i \le \frac{n}{d}$$

eine Basis von V und es gilt ${}^{B}\alpha^{B} = J(p^m)$, wobei $J(p^m)$ der **verallgemeinerte Jordanblock** von p^m ist, definiert durch

$$J(p^m) := \begin{bmatrix} M_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_d & M_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_d & M_p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_d & M_p \end{bmatrix} \in K^{md \times md}$$, wobei $0 \in K^{d \times d}$ die $d \times d$ Nullmatrix und $N_d := \{1,..,d\} \times \{1,..,d\} \to K : (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, \mathit{falls}\ (i,j) = (1,d) \\ 0, \mathit{sonst} \end{cases}$.

MATH: Das folgende Programm erwartet ein irreduzibles Polynom p und eine natürliche Zahl m und gibt den zugehörigen (verallgemeinerten) **Jordan-Block** $J(p^m)$ aus:

```
> JBlock:=proc(p, x::name, m::posint,
  characteristic::nonnegint:=0)
   local M,d,i,irr:
   if not type(p, polynom(anything, x)) or degree(p,x) < 1
  then
    error sprintf("p ist kein Polynom in %a.", x):
   fi:
   if characteristic > 0 then
    if not isprime(characteristic) then
      error "Charakteristik muss eine Primzahl sein.";
     fi;
    irr := Irreduc(p) mod characteristic:
   else
    irr := irreduc(p):
   fi:
   if not irr then
    error "p ist nicht irreduzibel.":
   fi:
   d := degree(p, x):
   M := LinearAlgebra[DiagonalMatrix]([(LinearAlgebra
  [CompanionMatrix](p, x))$m]):
   for i from 1 to m-1 do
    M[d*i+1,d*i]:=1:
   od:
   M:
  end:
```

```
> JBlock(x+1, x, 4);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

Wir behandeln hier zusätzlich **verallgemeinerte Jordan-Blöcke**. So lässt sich ein Jordan-Block für eine Potenz eines irreduziblen Polynoms angeben, welches nicht Grad 1 hat:

```
> JBlock(x^2+x+1, x, 3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3.10)$$

Letzteres ist ein verallgemeinerter Jordan-Block für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$. Der verallgemeinerte Jordan-Block ist aber weiterhin nur für irreduzible Polynome definiert. Über $\mathbb{C}$ gibt es keinen Jordan-Block zu $x^2 + x + 1$, wohl aber zu seinen irreduziblen Faktoren:

```
> solve(x^2+x+1, x);
```

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} \quad (1.3.11)$$

```
> JBlock(x-(-1/2+(1/2*I)*sqrt(3)), x, 3),JBlock(x-(-1/2-(1/2*
  I)*sqrt(3)), x, 3);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad (1.3.12)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Das bedeutet, dass wir über $\mathbb{C}$ eine Zerlegung in zwei Haupträume haben, während über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ nur ein Hauptraum vorliegt. Weiteres Beispiel: x^2+1 ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$, nicht aber über $\mathbb{F}_2$:

```
> JBlock(x^2+1, x, 2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.13}$$

```
> JBlock(x^2+1, x, 2, 2);
Error, (in JBlock) p ist nicht irreduzibel.
```

Der verallgemeinerte Jordanblock ermöglicht es uns, eine (verallgemeinerte) Jordan-Normalform zu definieren, die nicht erfordert, dass K algebraisch abgeschlossen ist

MAPLE hat eine etwas andere Auffassung davon, was eine solche Jordan-Block-Matrix ist und liefert auch nur etwas, wenn p vom Grad 1, ist:

```
> JordanBlockMatrix([[-1,4]]);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.3.14}$$

Wir hätten diese Matrix transponiert, weil wir eine andere Konvention benutzen, die durch den nilpotenten Fall von oben motiviert ist. (Überprüfe die Konvention in deiner Vorlesung.)

ÜBUNG [05]:

Man gebe die Matrix an, die die Begleitmatrix von $(x-1)^5$ auf ihren Jordanblock transformiert.

```
> B:=CompanionMatrix((x-1)^5,x);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.3.15}$$

Zerlegung eines Hauptraumes in zyklische Räume

MATH: Ist V nicht mehr zyklisch bezüglich A, aber immer noch mit Minimalpolynom p^m und charakteristischen Polynom p^c, wo $p \in K[x]$ normiert und irreduzibel ist ($m < c$), so kann man V in eine direkte Summe bezüglich A zyklischer Teilräume zerlegen. Z. B.

$$V := \langle v_1, Av_1, A^2v_1, \ldots \rangle \oplus \langle v_2, Av_2, A^2v_2, \ldots \rangle \oplus \ldots = \langle v_1 \rangle_A \oplus \langle v_2 \rangle_A \oplus \ldots$$

Dass V Summe solcher zyklischer Teilräume ist, ist wegen der endlichen Dimension klar (**DENKANSTOSS**: Warum?). Unsere Aufgabe besteht also darin, von der Summe zur direkten Summe überzugehen.

MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ für ein irreduzibles $p \in K[x]$. und $\nu := p(\alpha)$. Für $w \in V$ ist die α-**Länge** von w definiert als $\lambda(w) := \min\{i \in \mathbb{N} : \nu^i(w) = 0\}$.

BEISPIEL:

```
> p := x^2+x+1;
```

$$p := x^2 + x + 1 \qquad (1.4.1)$$

```
> A:=DiagonalMatrix([CompanionMatrix(p^3,x),CompanionMatrix(p,
  x)]):
> T:=SubMatrix(Transpose(A),1..8,[8,7,6,5,4,3,2,1])^2:
> A:=T.A.T^(-1);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -22 & -39 & -49 & -43 & -3 & -109 & -96 \\ 2 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 23 & 90 & 179 & 249 & 237 & 11 & 553 & 475 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (1.4.2)$$

Wir wissen dass p^3 das Minimalpolynom von A ist:

```
> Eins(p^3,A),Eins(p^2,A);
```

(1.4.3)

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\quad (1.4.3)$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&-1&1&0&0&1&1\\ -116&-264&-236&-292&-176&-44&-72&-72\\ 7&12&9&15&8&2&5&5\\ 8&18&16&20&12&3&5&5\\ 5&12&11&13&8&2&3&3\\ 586&1362&1230&1494&908&227&359&359\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ -2&-6&-6&-6&-4&-1&-1&-1 \end{bmatrix}$$

Wir haben wieder die nilpotente Matrix

```
> nu:=Eins(p,A):
  nu,nu^3;
```

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1&0&-2&-2\\ -21&-54&-79&-73&80&-9&116&116\\ 3&6&8&6&-3&1&-9&-9\\ 2&6&8&7&-4&1&-8&-8\\ 0&0&1&1&-5&0&-5&-5\\ 94&252&374&357&-418&42&-571&-571\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&2&0&1&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad (1.4.4)$$

```
> E1:=Column(IdentityMatrix(8),1):
> T1:=Matrix(map(i->(A^i).E1,[$0..5])): Rank(T1);
  Matrix(map(i->(A^i).E1,[$0..6])): Rank(%);
```

$$6$$

$$6 \quad (1.4.5)$$

Also hat der von E_1 erzeugte A-zyklische Teilraum $\langle E_1\rangle_A$ die Dimension 6.

Ebenso der von

E_2 erzeugte:

```
> E2:=Column(IdentityMatrix(8),2):
> T2:=Matrix(map(i->(A^i).E2,[$0..5])): Rank(T2);
  Matrix(map(i->(A^i).E2,[$0..6])): Rank(%);
```

$$6$$

$$6 \quad (1.4.6)$$

```
> Rank(<T1|T2>);
```

$$8 \quad (1.4.7)$$

Also ist klar: Die Summe der von E_1 und von E_2 erzeugten zyklischen Teilräume von V ist ganz V. Auch ist klar, dass der Schnitt 4-dimensional ist:

1.) $\langle E_1 \rangle_A + \langle E_2 \rangle_A = V$

2.) $\dim\left(\langle E_1 \rangle_A \cap \langle E_2 \rangle_A \right) = 4.$

Also nach unseren Einsichten über zyklische Räume für A gilt, da insbesondere der Schnitt A-invarianten Räumen wieder A-invariant ist und wir damit seine Form kennen:

$\langle E_1 \rangle_A \cap \langle E_2 \rangle_A = \nu\left(\langle E_1 \rangle_A \right)$

Wir versuchen, E_2 durch einen anderen Vektor zu ersetzen, wo der Schnitt kleiner, aber das Gesamterzeugtnis immer noch ganz V ist.

Da $\nu^3 E_2 = 0$ aber

```
> (nu^2).E2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -264 \\ 12 \\ 18 \\ 12 \\ 1362 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

noch ungleich Null, versuchen wir E_2 so zu modifizieren, dass wir Null bekommen. Also versuchen wir $\nu^2 E_2$ linear zu kombinieren aus $\nu^2(E_1)$ und $\nu^2(A E_1)$, die eine K-Basis des kleinsten, nicht-trivialen A-invarianten Teilraumes von $\langle E_1 \rangle_A$ sind:

```
> Test1:=<(nu^2).E1|(nu^2).A.E1|(nu^2).E2>;
```

(1.4.9)

$$Test1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -116 & 100 & -264 \\ 7 & -8 & 12 \\ 8 & -7 & 18 \\ 5 & -4 & 12 \\ 586 & -491 & 1362 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \tag{1.4.9}$$

```
> nn:=op(NullSpace(Test1));
```

$$nn := \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.10}$$

Wir ersetzen E_2 durch

```
> E2n:=<E1|A.E1|E2>.nn;
```

$$E2n := \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -46 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.11}$$

DENKANSTOSS: Warum ist immer noch $\langle E_1, E_{2n} \rangle_A = V$?

```
> (nu^2).E2n,nu.E2n;
```

(1.4.12)

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\112\\-12\\-8\\-4\\-528\\0\\0\end{bmatrix} \tag{1.4.12}$$

Wir haben also einen Forschritt: E_{2n} hat Länge 2 statt 3, d. h. es wird nach 2-maligem Anwenden von ν erstmalig 0.

DENKANSTOSS: $\dim\left(\langle E_1\rangle_A \cap \langle E_{2n}\rangle_A\right) = 2$.

Wir wollen aber aus Dimensionsgründen eines mit Länge 1. Also wiederholen wir den Erfolg:

```
> Test2:=<(nu^2).E1|(nu^2).A.E1|(nu).E2n>;
```

$$Test2 := \begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\-116 & 100 & 112\\7 & -8 & -12\\8 & -7 & -8\\5 & -4 & -4\\586 & -491 & -528\\0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{1.4.13}$$

```
> nn:=3*op(NullSpace(Test2));
```

$$nn := \begin{bmatrix}-4\\-8\\3\end{bmatrix} \tag{1.4.14}$$

Wir ersetzen E_{2n} durch (Hier gut aufpassen!):

```
> E2nn:=<nu.E1|nu.A.E1|E2n>.nn;
```

(1.4.15)

$$E2nn := \begin{bmatrix} -16 \\ 451 \\ -48 \\ -32 \\ -16 \\ -2130 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4.15)$$

```
> nu.E2nn;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4.16)$$

Jetzt hat E_{2nn} Länge 1. Immer noch erzeugt es mit E_1 zusammen V, wenn man die Bilder unter A hinzunimmt. Also: Unsere Zauberbasis sind die Spalten von:

```
> T:=Matrix([E1,A.E1,nu.E1,A.nu.E1,nu.nu.E1,A.nu.nu.E1,E2nn,A.
  E2nn]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -16 & 0 \\ 0 & -6 & -21 & -41 & -116 & 100 & 451 & 692 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 7 & -8 & -48 & -32 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 8 & -7 & -32 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & -4 & -16 & -32 \\ 0 & 23 & 94 & 202 & 586 & -491 & -2130 & -3560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 13 \end{bmatrix} \qquad (1.4.17)$$

```
> (T^(-1)).A.T,DiagonalMatrix([JBlock(p,x,3),JBlock(p,x,1)]);
```

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \textbf{(1.4.18)}$$

DENKANSTOSS: Warum haben wir mit (nu^2).E1 und (nu^2).A.E1 statt mit nu. E1 und nu.A.E1 gerechnet? Zeichne dir am besten ein Diagramm der Inklusionen der invarianten Räume.

ÜBUNG [06]:

Zerlege den Vektorraum $\mathbb{Q}^{4\times 1}$ in eine direkte Summe von bezüglich B zyklischen Teilräumen, mit

```
> B := Matrix([[-2050,-2965,-3211,-2401],[1152,1344,1152,
  576],[0,0,0,0],[4,298,598,706]]);
```

$$B := \left[\begin{array}{cccc} -2050 & -2965 & -3211 & -2401 \\ 1152 & 1344 & 1152 & 576 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 298 & 598 & 706 \end{array}\right] \qquad \textbf{(1.4.19)}$$

und benutze dies um (wie oben) die Jordan-Normalform herzustellen.

(Hinweis: Wende das eben vorgeführte Verfahren an. Warum ist es in diesem Fall einfacher? Warum muss man dennoch besonders aufpassen?)

Wir hatten nicht immer nur Glück, sondern eine solche Zerlegung lässt sich stets finden:

MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ für ein irreduzibles, normiertes $p \in K[x]$. Ist $v \in V$ mit $\mu_{\alpha,v} = p^m$ und $w \in V$ beliebig, so existiert ein $w_1 \in V$ mit: $\langle v\rangle_\alpha + \langle w\rangle_\alpha$
$= \langle v\rangle_\alpha \oplus < w_1 >_\alpha$

Bew.: Sei $\mu_{\alpha,w} = p^r$. Der Schnitt von $\langle v\rangle_\alpha$ und $\langle w\rangle_\alpha$ ist genau dann nicht leer, wenn $\nu^{r-1}(\langle w\rangle_\alpha)$ in $\langle v\rangle_\alpha$ enthalten ist. Finde nun durch Lösen eines LGS ein $q \in K[x]$ mit kleinerem Grad als p mit: $q(\alpha)\nu^{m-1}(v) = \nu^{r-1}(w)$. Nun ersetze w

(beachte $r \leq m$) durch $w' := w - q(\alpha)\nu^{m-r}(v)$. Nun gilt $\mu_{\alpha, w'} = p^s$ mit $s < r$. Ferner ist $\langle v\rangle_\alpha + \langle w\rangle_\alpha = \langle v\rangle_\alpha + \langle w'\rangle_\alpha$. Nach endlich vielen Schritten liegt eine direkte Summe vor.

MATH: Der Beweis des vorherigen Satzes liefert uns den Algorithmus, welchen wir oben bereits (unbewusst) verwendet haben.

Es folgt sofort:
MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ für ein irreduzibles $p \in K[x]$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und Vektoren $v_1, ..., v_k \in V$ mit: $V = \bigoplus_{i=1}^{k} < v_i >_\alpha$

Die Partition eines Endomorphismus

MATH: Eine **Partition** der natürlichen Zahl c ist ein k-Tupel $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit der Eigenschaft $a_1 \geq ... \geq a_k$ und $a_1 + ... + a_k = c$. Ist $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^k$ eine Partition von $c \in \mathbb{N}$, so ist die **konjugierte Partition** a' von a definiert durch $a'_i := |\{j : a_j \geq i\}|$. Sie ist ebenfalls eine Partition von c.

BEISPIEL:
Wir nehmen die Partition $(5, 3, 2)$ von 10 und visualisieren die durch
$x\,x\,x\,x\,x$
$x\,x\,x$
$x\,x$
Dieses Schema wird an der Diagonalen gespiegelt (transponiert):
$x\,x\,x$
$x\,x\,x$
$x\,x$
x
x
Nun erhalten wir die konjugierte Partition $(3, 3, 2, 1, 1)$.

Wir stellen fest, dass ein Zusammenhang zwischen Partitionen und Zerlegungen besteht:
MATH: Sei $\alpha \in End(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ und $\chi_\alpha = p^c$ für ein irreduzibles $p \in K[x]$. Eine Zerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^{k} < v_i >_\alpha$ mit $\lambda(v_1) \geq ... \geq \lambda(v_k) > 0$ heißt der Länge nach geordnet. Ihr wird die Partition $(\lambda(v_1), ..., \lambda(v_k))$ von c zugeordnet. Je zwei der Länge nach geordneten Zerlegungen von V ist dieselbe Partition von c zugeordnet. Diese heißt daher die zu α **gehörige Partition** .

BEISPIEL: Wir betrachten erneut die Matrix A aus dem vorherigem Abschnitt.

Dort hatten wir E1 und E2nn als Vektoren einer Zerlegung gefunden.

```
> A;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -22 & -39 & -49 & -43 & -3 & -109 & -96 \\ 2 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 23 & 90 & 179 & 249 & 237 & 11 & 553 & 475 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

```
> E1;
  (nu^3).E1,(nu^2).E1;
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -116 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \\ 586 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (1.5.2)$$

Also Länge 3.

```
> E2nn;
  (nu^1).E2nn,(nu^0).E2nn;
```

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 451 \\ -48 \\ -32 \\ -16 \\ -2130 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 451 \\ -48 \\ -32 \\ -16 \\ -2130 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.3}$$

Also Länge 1, damit ergibt sich die Partition $(3, 1)$.
Wir betrachten eine weitere Zerlegung:

```
> v,w:=Vector([1,0,0,0,0,0,0,0]),Vector([-52/3,1483/3,-52,
  -104/3,-52/3,-2342,0,0]);
```

$$v, w := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{52}{3} \\ \frac{1483}{3} \\ -52 \\ -\frac{104}{3} \\ -\frac{52}{3} \\ -2342 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.4}$$

```
> (nu^3).v,(nu^2).v;
  (nu^1).w,(nu^0).w;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -116 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \\ 586 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{52}{3} \\ \frac{1483}{3} \\ -52 \\ -\frac{104}{3} \\ -\frac{52}{3} \\ -2342 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.5}$$

Also identische Längen, haben wir auch eine Zerlegung gefunden?

```
> Matrix([v,A.v,nu.v,A.nu.v,nu.nu.v,A.nu.nu.v,w,A.w]):
  Rank(%);
```

$$8 \tag{1.5.6}$$

Ja, es war eine. (**DENKANSTOSS**: Warum reicht dies als Verifikation?)

Mithilfe der Partitionen können wir nun endlich unser lang ersehntes Ziel definieren: Die Jordan-Normalform!

MATH: Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\alpha \in End(V)$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\alpha = p^c$ für ein normiertes irreduzibles Polynom $p \in K[x]$. Ist $a = (a(1),..., a(k)) \in \mathbb{N}^k$ die zu α gehörige Partition von c, so gibt es eine Basis B von V mit

$${}_B\alpha^B = Diag(J(p^{a(1)}),..., J(p^{a(k)})).$$

Diese Matrix heißt (verallgemeinerte) **Jordan-Normalform** .

DENKANSTOSSS: Definiere die Jordan-Normalform für einen beliebigen

Endomorphismus α durch die Rückführung auf die Haupträume.

Will man lediglich die Jordan-Normalform ohne die Transformationsmatrix, so reicht schon die Partition alleine aus. Hier zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Partition am Beipiel von C:

```
> C := Matrix([[-585,-474,10119,10546,-14017,-1617,-6895,872,
  -3631,-688],[-1382,-1132,23602,24795,-32808,-3775,-16114,
  1980,-8495,-1605],[-4029,-3225,69214,72365,-96019,-11064,
  -47198,5906,-24873,-4708],[2785,2154,-48563,-50147,67013,
  7752,33015,-4316,17372,3303],[-12362,-9644,214162,222347,
  -296219,-34207,-145790,18714,-76770,-14569],[-51550,-40704,
  890825,926821,-1233228,-142321,-606739,77277,-319553,
  -60594],[12360,8726,-220343,-223419,301759,35099,149135,
  -20755,78336,14996],[-52629,-45895,881431,941183,-1233773,
  -141252,-604243,69661,-319085,-59917],[187520,158113,
  -3175625,-3359756,4427554,508348,2171935,-259744,1145853,
  215917],[-822332,-701158,13876850,14724709,-19371777,
  -2222151,-9497914,1122822,-5012322,-943439]]);
```

$C := [[-585, -474, 10119, 10546, -14017, -1617, -6895, 872, -3631, -688],$ **(1.5.7)**
$[-1382, -1132, 23602, 24795, -32808, -3775, -16114, 1980, -8495, -1605],$
$[-4029, -3225, 69214, 72365, -96019, -11064, -47198, 5906, -24873, -4708],$
$[2785, 2154, -48563, -50147, 67013, 7752, 33015, -4316, 17372, 3303],$
$[-12362, -9644, 214162, 222347, -296219, -34207, -145790, 18714, -76770, -14569],$
$[-51550, -40704, 890825, 926821, -1233228, -142321, -606739, 77277, -319553, -60594],$
$[12360, 8726, -220343, -223419, 301759, 35099, 149135, -20755, 78336, 14996],$
$[-52629, -45895, 881431, 941183, -1233773, -141252, -604243, 69661, -319085, -59917],$
$[187520, 158113, -3175625, -3359756, 4427554, 508348, 2171935, -259744, 1145853, 215917],$
$[-822332, -701158, 13876850, 14724709, -19371777, -2222151, -9497914, 1122822, -5012322, -943439]]$

```
> factor(MinimalPolynomial(C,x));
  factor(CharacteristicPolynomial(C,x));
```

$$(x-2)^3$$
$$(x-2)^{10} \qquad \textbf{(1.5.8)}$$

```
> CC:=C-2:
```

Erste Möglichkeit über **Bilder**:

```
> Rank(IdentityMatrix(10)),Rank(CC),Rank(CC^2),Rank(CC^3);
```

$$10, 5, 2, 0 \tag{1.5.9}$$

```
> (10-5,5-2,2-0);
```

$$5, 3, 2 \tag{1.5.10}$$

ist die konjugierte Partition.

Zweite Möglichkeit über **Kerne**:

```
> nops(NullSpace(IdentityMatrix(10))),nops(NullSpace(CC)),nops
  (NullSpace(CC^2)),nops(NullSpace(CC^3));
```

$$0, 5, 8, 10 \tag{1.5.11}$$

```
> (5-0,8-5,10-8);
```

$$5, 3, 2 \tag{1.5.12}$$

ist wieder die konjugierte Partition.

Dass dieses Verfahren funktioniert liegt an der Beweisidee der Eindeutigkeit der zu α-gehörigen Partition: Definiere $V_0 := V$ und $V_i := Bild(\nu^i)$ für $i > 0$. Dann liefert jede Zerlegung von V auch Zerlegungen der V_i und wir erkennen: Die zu α-gehörige Partition ist konjugiert zu folgender: $\left(Dim_{K[x]/pK[x]}(V_0 / V_1), Dim_{K[x]/pK[x]}(V_1 / V_2), \ldots, Dim_{K[x]/pK[x]}(V_{m-1} / V_m)\right)$, wobei m minimal ist mit $V_m = \{0\}$.

Insbesondere muss man aufpassen, falls p nicht Grad 1 hat:

BEISPIEL:

```
> X:=DiagonalMatrix([JBlock(x^2+1,x,2),JBlock(x^2+1,x,1)]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.13}$$

```
> XX:=X^2+1;
```

(1.5.14)

$$XX := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5.14)}$$

```
> nops(NullSpace(IdentityMatrix(10))),nops(NullSpace(XX)),nops
  (NullSpace(XX^2));
```

$$0, 4, 6 \quad \textbf{(1.5.15)}$$

```
> (4-0,6-4);
```

$$4, 2 \quad \textbf{(1.5.16)}$$

DENKANSTOSS: Warum ist die zugehörige Partition nicht $(4, 2)$ sondern $(2, 1)$?

ÜBUNG [07]:

1.) Schreibe mit Hilfe der eben ausgerechneten Partition die Jordan-Normalform von C hin, ohne die zugehörige Basistransformation auszurechnen.
2.) Schreibe alle möglichen Partitionen eines Endomorphismus mit Minimalpolynom p^3 und charakteristischem Polynom p^{10} hin, wobei p ein beliebiges Polynom von Grad 1 ist. (Hinweis: Du darfst dir Hilfe in Maples **combinat**-Paket suchen.) Schreibe für einige von ihnen die zugehörige Jordan-Form für den Fall $p = x - a$ hin.

Jordan-Normalform

```
> interface(rtablesize=20):#damit Maple die nächste Matrix
  auch anzeigen kann
```

MATH: Mit Hilfe der vorgestellten Verfahren lässt sich die Jordan-Normalform einer beliebigen Matrix herstellen. Sie ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Haupträume, die Basis ist es allerdings nicht.

ÜBUNG [08]:

Bestimme eine Basis, die die folgende Matrix E über $\mathbb{Q}$ auf Jordan-Normalform transformiert, sowie die zugehörige Jordan-Normalform.

```
E:=Matrix([[27502131866242729094 0,-92145071394549211058 6,
24536067924862024588 37,-38378105747952767660 56,
40011302933926698171 96,-50874283373523540465 35,
14411457466144118744 71,20822039034687643353 93,
```

-4941456758923748098857,3494002585770741408845,
-2763658307219555998694,3136403345001268019758,
-4614177252374464554244,-5573936352142738880160,
-1740530619726901686759],[5473551109668062 6937,
-1833896951098367038838,4883236778522763322 88,
-7638117813023327594 19,7963161279219739107 81,
-1012514199142919431122,2868208522502579821 12,
4144060373870812982 68,-9834625278407172813 38,
6953861549185156296 60,-5500309964258622648 57,
6242157550873402700 21,-9183264462105050459 87,
-1109340383279099019042,-3464052660118002535 38],
[-527539455237449165 3,1767505188423684335 1,
-470645111066405830 12,7361598401820973504 0,
-767487446273665521 61,975858594053450253 15,
-276437203408187317 40,-399403478345429286 48,
947858667597240341 34,-670211396578381338 63,
530118466795146596 77,-601617547350130389 17,
885080678808919658 33,106917942254027654 033,
333864508911712657 78],[272207712493157466 9,
-912023810511081199 8,242850516312205960 41,
-379854784577394151 41,396019672165250798 56,
-503538139122719759 78,142640210207364618 10,
206090191212870919 57,-489090317533354645 37,
345825718509205284 06,-273538469519280339 16,
310431636409472214 18,-456697190245276960 35,
-551691218476625842 54,-172272411762268561 57],
[-528799482172912163,177172687103693841 9,
-471769245974425451 5,737918156490436802 2,
-769320588506602569 9,978189430356789288 8,
-277097473116550005 9,-400357452755943906 4,
950122626132151264 9,-671812195160858999 1,
531384653694570645 2,-603054509660690600 2,
887194692242962723 2,107173315545611919 57,
334661943624600714 9],[-56716525441546926,
19002702450413513 4,-50599732684860697 3,79145603025915565 0,
-82513679006343241 8,10491596074471973 30,
-29720161258897907 6,-42940442304592280 1,
10190564838712692 29,-72055391019308996 3,56993798682757181 1,
-64680767649887562 3,95156296536885550 1,11494901721196344 49,
35894253454836798 8],[6829498508865867,-2288203077306023 7,
6092947271196509 2,-9530287224771357 6,9935852793310788 2,
-1263341489776068 32,3578741740982095 1,5170656777831165 6,
-1227092929771825 74,8676522084022384 5,-6862886259142766 8,
7788509658843118 2,-1145820870106405 12,-1384154151781125 56,
-4322192668509382 0],[1685737437363180,-5648012934925324,
1503933166620339 5,-2352377988330888 9,2452484469250348 9,
-3118328589900050 4,8833472799747367,1276282540338226 9,
-3028855615310077 1,2141641598442111 1,-1693978595984312 3,

```
19224518895633400,-28282503242889455,-34165326629829128,
-10668546136044475],[-570726205014827,1912201103665996,
-5091742342330493,7964251918987695,-8303174165646742,
10557467626088858,-2990675947740913,-4321004414036086,
10254546363840064,-7250779124286824,5735163460459944,
-6508686625443272,9575373594033308,11567072533601344,
3611961574981558],[283081090861199,-948454739968805,
2525512170274536,-3950281415701150,4118387380455265,
-5236520464747078,1483379950427389,2143224951641034,
-5086271044617423,3596397792967601,-2844650051808365,
3228318752178110,-4749400287903652,-5737286078890674,
-1791538593833784],[-21007977229181,70386600247219,
-187422981892585,293157772488464,-305633230561086,
388611978106093,-110084400645203,-159052732361623,
377461687614661,-266895406942102,211106800999043,
-239579572866461,352461878674362,425774730969122,
132953429952770],[-11562714168080,38740528469704,
-103156926741552,161352970464701,-168219417157065,
213890617648291,-60590053248774,-87542044712814,
207753538360141,-146898260097180,116192414534242,
-131863724492416,193993734553842,234344861495517,
73177083705453],[3641290229729,-12200034157986,
32485825042999,-50812723237425,52975081045115,
-67357698629971,19080811452471,27568440028181,
-65425030701240,46260695498690,-36590916083979,
41526071186902,-61091840549379,-73799078845857,
-23044675849098],[337363329312,-1130325758619,
3009791969445,-4707767961695,4908109099879,-6240649888045,
1767825597898,2554199233000,-6061589377696,4286025355034,
-3390126162356,3847365286742,-5660121940604,-6837439854769,
-2135075227981],[33396666821,-111894534700,297948860720,
-466036893853,485869299046,-617781741388,175002667344,
252848289565,-600055973118,424287254545,-335599349746,
380862901982,-560313437195,-676859874525,-211357873947]]):
Dimension(E);
```

$$15, 15 \tag{1.6.1}$$