Wiederholung: Sheets 5 - 8

ÜBUNG [00]:
Wiederhole die Themen der Worksheets 5 - 8. Wir stellen Fragen im Testat.

Normierte Räume: Erste Beispiele

Aufgaben: 4

```
> restart;
  with(plots):
  with(LinearAlgebra):
```

Definition

Normierte Räume sind Vektorräume mit einem Abstandsbegriff, der es erlaubt, topologische und analytische Betrachtungen in diesen Vektorräumen anzustellen. Hervorzuheben ist erst einmal der Fall endlicher Dimension. Der unendlichdimensionale Fall dient meistens als grundlegendes technisches Werkzeug.

MATH: Ein **normierter Raum** ist ein *K*-Vektorraum *V* mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zusammen mit einer Abbildung

$$\|\ \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\|,$$

die **Norm** genannt wird und folgende Eigenschaften hat:

1.) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
für alle $v \in V$.

2.) $\|a v\| = |a| \cdot \|v\|$
für alle *a2 K* und alle *v2 V*. Dabei bezeichnet $|a|$ den Absolutbetrag von $a \in K$.

3.) Dreiecksungleichung:
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
für alle $v, w \in V$.

Möglicherweise ist der Fall $K = \mathbb{C}$ etwas abstrakt im Augenblick. Es genügt, wenn wir im Folgenden immer mit $K = \mathbb{R}$ arbeiten.

BEISPIEL: Sei *V*=*K* ein Körper der obigen und $\|\ \ \|$ der gewöhnliche Absolutbetrag.

MATH: Die erste Bedingung erlaubt es, den Nullvektor an seiner Norm zu erkennen.
Die zweite Bedinung ermöglicht es, jeden Vektor $\neq 0$ auf Norm Eins zu

normieren (im Falle $K=\mathbb{R}$ auf genau zwei Arten).
Die dritte Bedingung, also die Dreiecksungleichung, ist eine Konvexitätsbedingung. Da nur zwei Vektoren involviert sind, kann man sich diese sehr schön in der Ebene veranschaulichen:
Sei

$$\|\ \|_{\leq 1} := \{v \in V \mid \ \|v\| \leqq 1\}$$

die Menge der Vektoren der Norm $\leqq 1$. Dann impliziert die Dreiecksungleichung, dass mit je zwei Vektoren auch deren Verbindungsstrecke (in Parameterdarstellung) in der Menge $\|\ \|_{\leq 1}$ liegt:

$$v,\ w \in \|\|_{\leqq 1}\ , 0 \leqq \lambda \leqq 1 \Rightarrow \lambda v + (1-\lambda) w \in \|\ \|_{\leqq 1}$$

BEISPIEL: $V=K^n$. Als einfachste Norm bietet sich an:

$$\|(a_1,..., a_n)\| := \max(|a_1|,..., |a_n|)$$

für alle $(a_1,..., a_n) \in K^n$.
Wir sprechen von der **Maximumsnorm**.

Euklidische Norm und das Standardskalarprodukt: Elementargeometrische Aspekte

Wir betrachten eine besonders schöne Norm auf $\mathbb{R}^n$, welche uns von der Elementargeometrie her vertraut ist:

BEISPIEL: Sei $K=\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir die (Standard-)Euklidische Norm:

$$\|(a_1,..., a_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Diese Norm wird von dem sogenannten Standard-Skalarprodukt induziert, welches zwei Vektoren zu einer Zahl verarbeitet:

```
> BilinearForm(<1|2>,<2|3>);
```

$$8 \tag{2.2.1}$$

```
> Vector[row](4,symbol=a);
  Vector[row](4,symbol=b);
```

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

```
> BilinearForm(Vector[row](4,symbol=a),Vector[row](4,symbol=
  b),conjugate=false);
```

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \tag{2.2.3}$$

```
> BilinearForm(Vector[row](4,symbol=a),Vector[row](4,symbol=
  a),conjugate=false);
```

(2.2.4)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \quad \textbf{(2.2.4)}$$

Wenn man zweimal den selben Vektor einsetzt und die Quadratwurzel zieht, bekommt man unsere Norm. Die ersten zwei Normeigenschaften sind sofort klar. Bei der Dreiecksungleichung ist es nicht sofort klar.

MATH: Wir haben also

$$\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

so dass

$$\|v\| := \sqrt{(\Psi(v, v))}$$

unsere Norm ist. Nun gilt die berühmte **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

$$\Psi(v, v) \cdot \Psi(w, w) - \Psi(v, w)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $(v, w) \in (\mathbb{R}^n)^2$ linear abhängig sind.

Falls du schon Determinanten von 2×2-Matrizen kennst, beachte: Die linke Seite der obigen Ungleichung ist die Determinante von

```
> <<Psi(v,v) | Psi(v,w)> , <Psi(w,v) | Psi(w,w)>>;
  Determinant(%);
```

$$\begin{bmatrix} \Psi(v, v) & \Psi(v, w) \\ \Psi(w, v) & \Psi(w, w) \end{bmatrix}$$

$$\Psi(v, v)\, \Psi(w, w) - \Psi(v, w)\, \Psi(w, v) \quad \textbf{(2.2.5)}$$

In einem Spezialfall ist die Ungleichung offensichtlich:

```
> PSI:=proc(v,w)
    BilinearForm(v,w,conjugate=false)
  end proc:
> v:=<a|0>;w:=<b|c>;
```

$$v := \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.6)}$$

```
> <<PSI(v,v) | PSI(v,w)> , <PSI(v,w) | PSI(w,w)>>;
```

$$\begin{bmatrix} a^2 & b\, a \\ b\, a & b^2 + c^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.7)}$$

```
> Determinant(%);
```

$$a^2\, c^2 \quad \textbf{(2.2.8)}$$

Was offenbar ≥ 0 ist.
Der allgemeine Fall kann (mit Hilfe von Basiswechseln) auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden.

MATH: Eine andere Sicht der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist diese:

Für $v,\ w \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt:

$$|\Psi(v,\ w)| \le \|v\| \cdot \|w\|,$$

d. h. es gibt ein eindeutiges $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\Psi(v,\ w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

α heißt auch der **Winkel** zwischen *v* und *w*.

DENKANSTOSS: Die Gleichung kann man auch umschreiben zu

$$\cos(\alpha) = \Psi\left(\frac{v}{\|v\|},\ \frac{w}{\|w\|}\right)$$

wobei

$$\frac{w}{\|w\|} := \frac{1}{\|w\|} \cdot w$$

ein sogenannter Einheitsvektor ist, also Norm 1 hat.

MATH: Die geometrische Bedeutung des Winkels ist der des Bogens auf dem Einheitskreis, also des in der Kugeloberfläche gemessenen Abstandes zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche. Man bleibt dabei in der von den beiden Punkten und dem Kugelmittelpunkt aufgespannten Ebene, so dass man einen Kreisbogen bekommt.
Es sei darauf hingewiesen, dass derartig detaillierte Betrachtungen bei allgemeinen normierten Räumen nicht möglich und oft auch gar nicht wünschenswert sind, da bereits die drei Axiome für Normen für Konvergenzbetrachtungen ausreichen: Je weniger man fordert, desto mehr Beispiele kann man erhoffen.

Wir wollen den Euklidischen Fall, genauer die Bedeutung des Winkels, mit Hilfe einer Aufgabe verinnerlichen.

ÜBUNG [01]:

Man berechne die Entfernung von Aachen nach Acapulco ausgehend von einem auf
6371km gerundeten Erdradius und den geographischen Breiten und Längen:

	Breite	Länge
Aachen, Deutschland	50° 47´ N	6° 05´ O
Acapulco, Mexiko	16° 50´ N	99° 55´ W

$$\left(50°\,47´ = \left(50 + \frac{47}{60}\right)°\right)$$

Hinweise: Um den Winkel Aachen-Erdmittelpunkt-Acapulco zu finden orientiere dich an

```
> ?Definition,sphericalcoordinates
```

Schreibe damit eine Funktion, die die Winkelpaare in cartesische Koordinaten umrechnet.
Bilde das Standardskalarprodukt der beiden Vektoren um den Winkel dieser beiden Vektoren zu finden.

Rechne dies in den Abstand zunächst auf der Einheitskugel, dann auf der Kugel mit Radius 6371 um.
Vorsicht bei den Angaben O und W!
Zur Kontrolle: Das Ergebnis ist etwas weniger als ein Viertel des Erdumfangs.

Euklidische Norm und das Standardskalarprodukt: Abstrakte Aspekte

MATH: Die entscheidenden Eigenschaften, die unser Standardskalarprodukt Ψ hat, sind
i) (bilinear)

$$\psi\left(a\cdot v_1 + b\cdot v_2,\, w\right) = a\cdot\Psi\left(v_1,\, w\right) + b\cdot\Psi\left(v_2,\, w\right),$$
$$\psi\left(v,\, a\cdot w_1 + b\cdot w_2\right) = a\cdot\Psi\left(v,\, w_1\right) + b\cdot\Psi\left(v,\, w_2\right)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$.
ii) (symmetrisch)

$$\Psi\left(v,\, w\right) = \Psi(w,\, v)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
iii) (positiv definit)

$$\Psi(v,\, v) > 0$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

Wir nutzen dies um allgemein zu definieren:

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\Psi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii) nennt man **Skalarprodukt**.

Der Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, der aus der Analysis bekannt ist, gilt bei jedem Skalarprodukt.

ÜBUNG [02]:
1) Leite aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung bei Normen entstehend aus Skalarprodukten her. (Hinweis: Benutze i) und ii).) 2) Begründe kurz: Ein Skalarprodukt induziert eine Norm auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Hinweis: Analog zum Standardskalarprodukt)

Es gibt natürlich auch andere Vektorräume neben dem $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt. Hier ist einer:

BEISPIEL: $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit Bilinearform

$$ISp : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \int_0^1 p(x) q(x) \, \mathrm{d}x$$

```
> ISp:=proc(p::polynom, q::polynom)
>   int(p*q,x=0..1)
  end proc:
```

Hier ist z. B. die Matrix der Skalarprodukte zwischen den Monomen:

```
> B:=[1,x,x^2,x^3];
```

$$B := [1, x, x^2, x^3] \tag{2.3.1}$$

```
> G:=Matrix(4,4,(i,j)->ISp(B[i],B[j]));
```

$$G := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Man kann also auch in diesem Raum den Vektoren, sprich Polynomen oder Polynomfunktionen, Normen zuordnen, und Paaren von solchen einen Winkel.

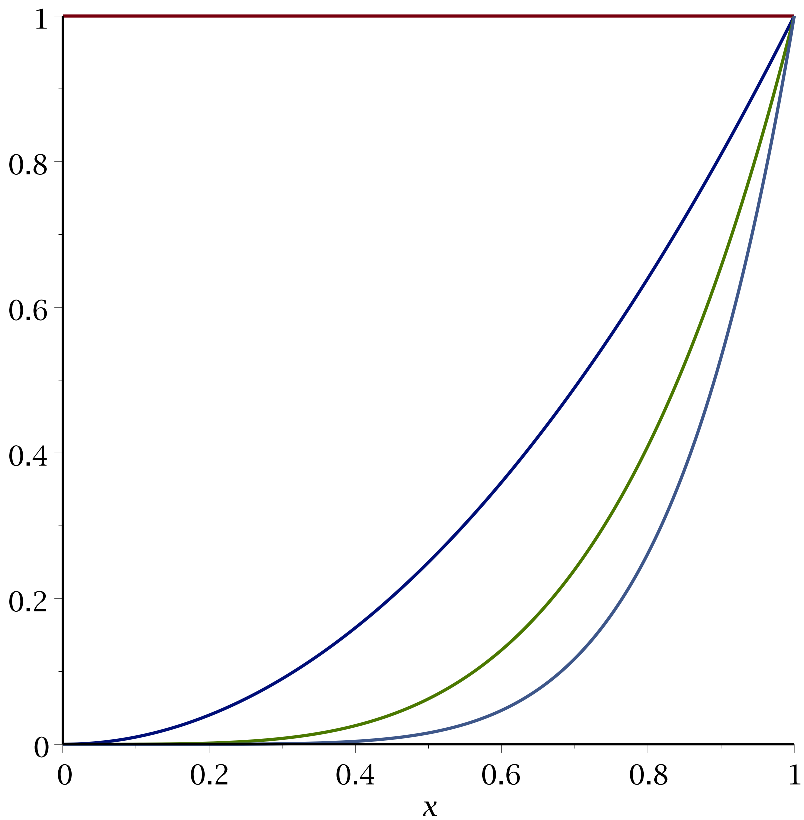
Die Bilinearität erlaubt uns Mittel der linearen Algebra zu benutzen. Wir sehen dies in der folgenden Übung.

ÜBUNG [03]:

1) Wie berechnet man nur mit Hilfe von **G** und geeigneten Vektoren **ISp**$(x^2 + 2, x^3 + 3 \cdot x + 1)$? Überprüfe das Ergebnis mit **ISp**.
2) Verallgemeinere: Warum reicht es aus, das Skalarprodukt zwischen den Monomen zu kennen?
3) Verallgemeinere: Warum reicht es aus, das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren einer gegebenen Basis zu kennen?

MATH: Erstaunlicherweise werden die Normen der x^i mit steigendem i kleiner. Wir untersuchen einen Plot des Sachverhaltes:

```
> plot([1,(x^1)^2,(x^2)^2,(x^3)^2],x=0..1);
```



Offenbar gilt auf [0,1)

$$0 \leq a^{2\cdot(i+1)} < a^{2\cdot i}$$

Dieselbe Relation gilt für die Wurzeln der Integrale.

Äquivalenz von Normen

Mit Normen lässt sich eine wichtige Klasse von offenen Mengen definieren.

MATH: Sei V ein normierter Raum mit Norm $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann nennen wir

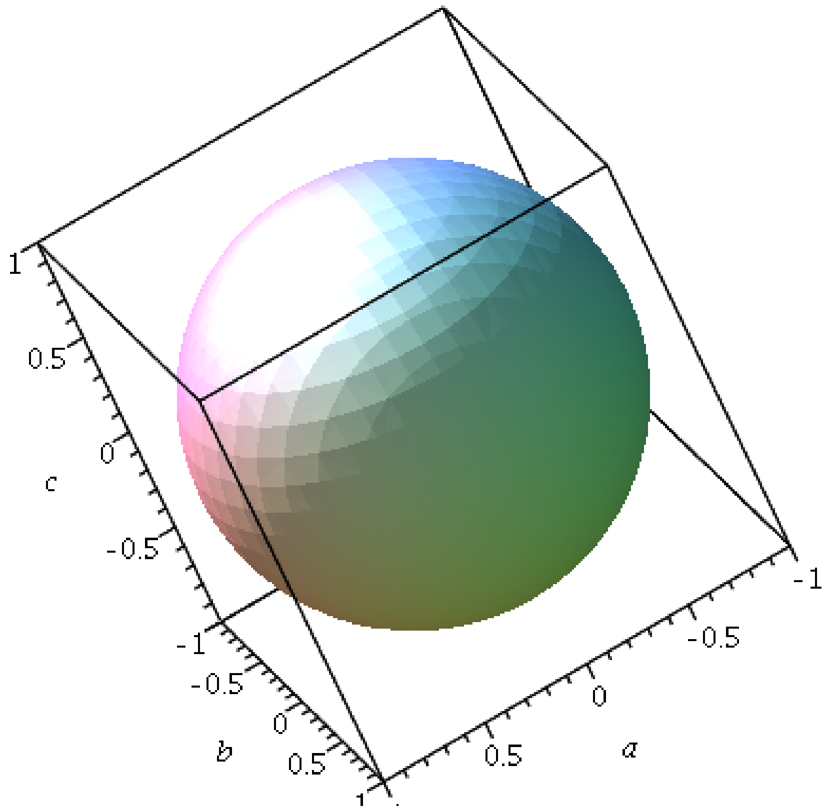
$$B_r(x) := \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}$$

den r-**Ball** um x für $x \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wegen des zweiten Axioms für Normen betrachtet man oft zur Anschauung $B_1(0)$. Anderen Bälle um 0 erhalten wir durch Skalierung. Wir zeichnen nur den Rand eines Balles, obwohl dieser nicht Teil des Balles ist.

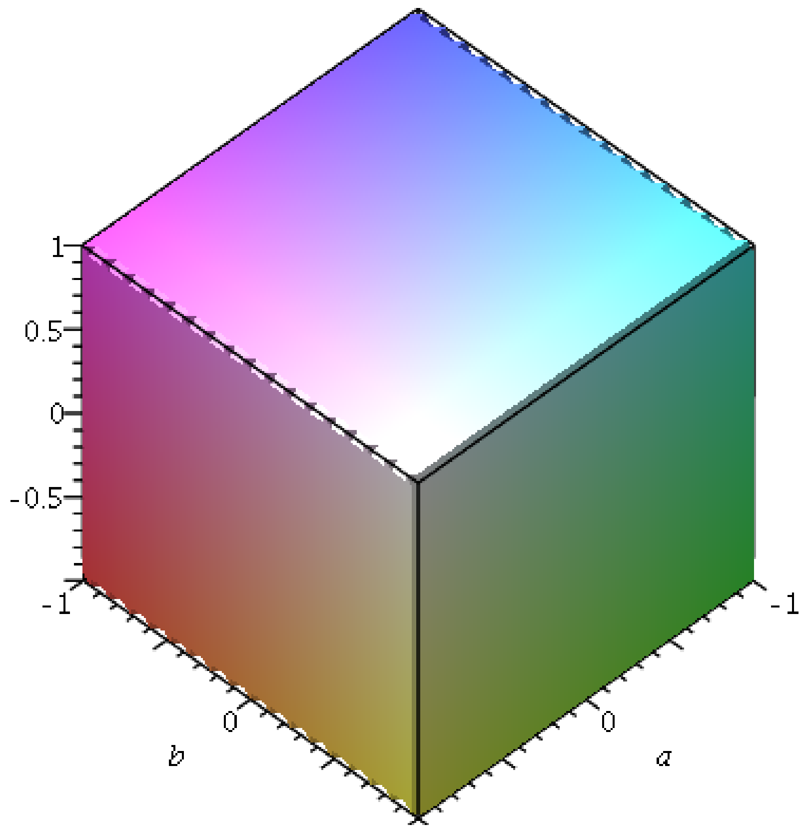
BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Norm $(a, b, c) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch eine Spähre.

```
> implicitplot3d(sqrt(a^2+b^2+c^2)-1,a=-1.2..1.2,b=-1.2..1.2,
  c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=surface);
```



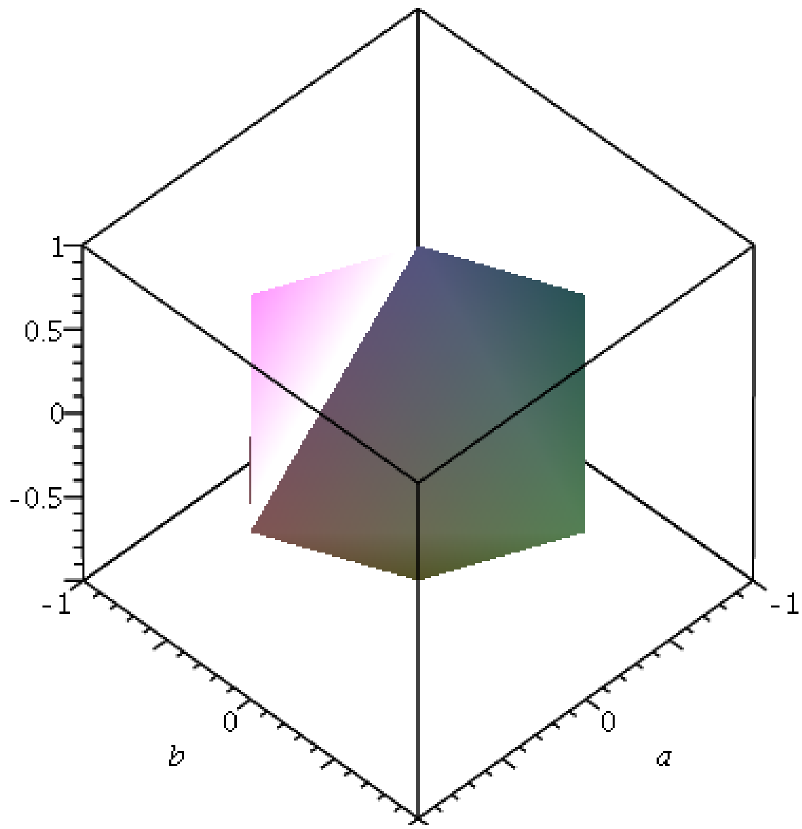
BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der Maximumsnorm $(a, b, c) \mapsto \max(|a|,|b|,|c|)$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch einen Würfel.

```
> implicitplot3d(max(abs(a),abs(b),abs(c))-1,a=-1.2..1.2,b=
  -1.2..1.2,c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=
  surface);
```



BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm $(a, b, c) \mapsto |a| + |b| + |c|$. Dann visualisiert sich der Rand von $B_1(0)$ durch ein Oktaeder.

```
> implicitplot3d(abs(a)+abs(b)+abs(c)-1,a=-1.2..1.2,b=-1.2..1.2,c=-1.2..1.2,axes=boxed,grid=[21,21,21],style=surface);
```



MATH: Zwei Normen $\| \|_a$ und $\| \|_b$ auf einem Vektorraum V nennt man **äquivalent**, wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$c_1 \cdot \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq c_2 \cdot \| x \|_a$$

für alle $x \in V$.

Beachte: Die beiden Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ sind unabhängig von x.

Die 3 Normen aus den Beispielen sind äquivalent. Es gilt sogar:

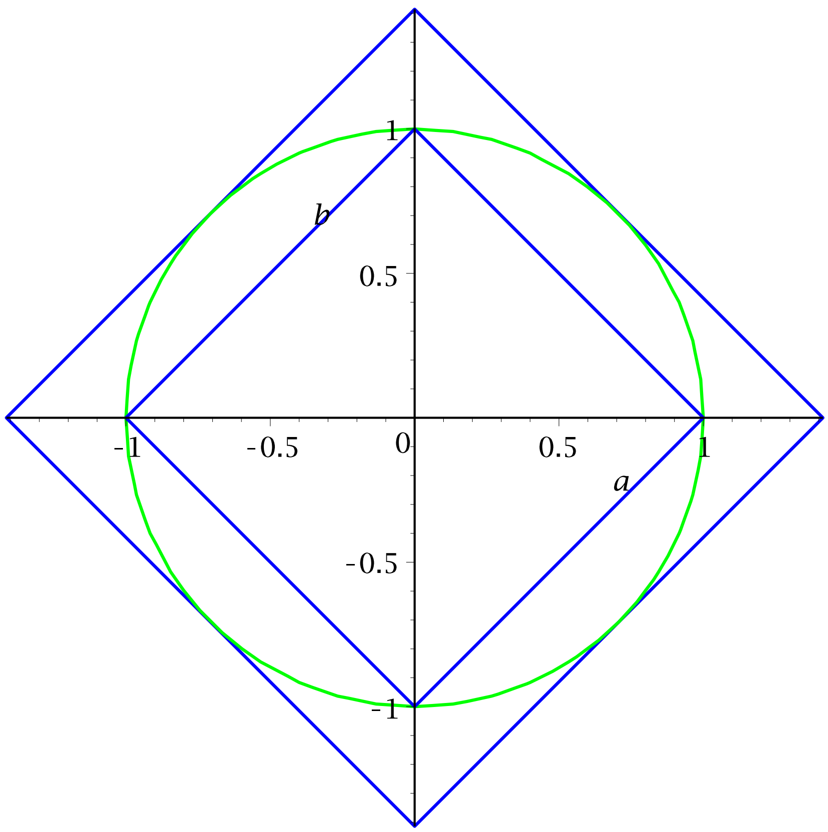
MATH: Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.

Alle obigen Beispiele sind endlich dimensional. Wir wollen die Aussage zumindest an Beispielen einsehen.

Wir stellen uns die Bedingung der Äquivalenz mit Bällen vor: Zwei Normen sind äquivalent, wenn jeder Ball der einen Norm sowohl von außen als auch von innen durch einen Ball der anderen Norm approximiert werden kann. Die Faktoren für den Radius der jeweiligen Approximation zwischen den beiden Normen sind konstant.

BEISPIEL: $V = \mathbb{R}^2$ mit der 1-Norm $(a, b) \mapsto |a| + |b|$ und der Euklidischen Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$.

```
> p1:=implicitplot(abs(a)+abs(b)-sqrt(2),a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=blue):
  p2:=implicitplot(sqrt(a^2+b^2)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=green):
  p3:=implicitplot(abs(a)+abs(b)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=blue):
  display(p1,p2,p3);
```



Die Plots deuten an: Als Konstanten kann man zum Beispiel $c_1 = 1$ und $c_2 = \sqrt{2}$ wählen.

ÜBUNG [04]:

$V = \mathbb{R}^2$ mit der Maximumnorm $(a, b) \mapsto \max(|a|,|b|)$ und der Euklidischen Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$.

1) Beweise durch explizite Angabe von Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$: Diese beiden Normen sind äquivalent.

2) Visualisiere mit deinen Konstanten aus dem Beweis der Äquivalenz die ineinander enthaltenen Bälle.

3) Betrachte den Vektorraum $K_{konv}^{\mathbb{N}}$ aller konvergenten Folgen aus $K^{\mathbb{N}}$. Zeige, dass die beiden Normen

$$\| .. \|_1 : K_{konv}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\left(|a_i|, i \in \mathbb{N}\right)$$

und

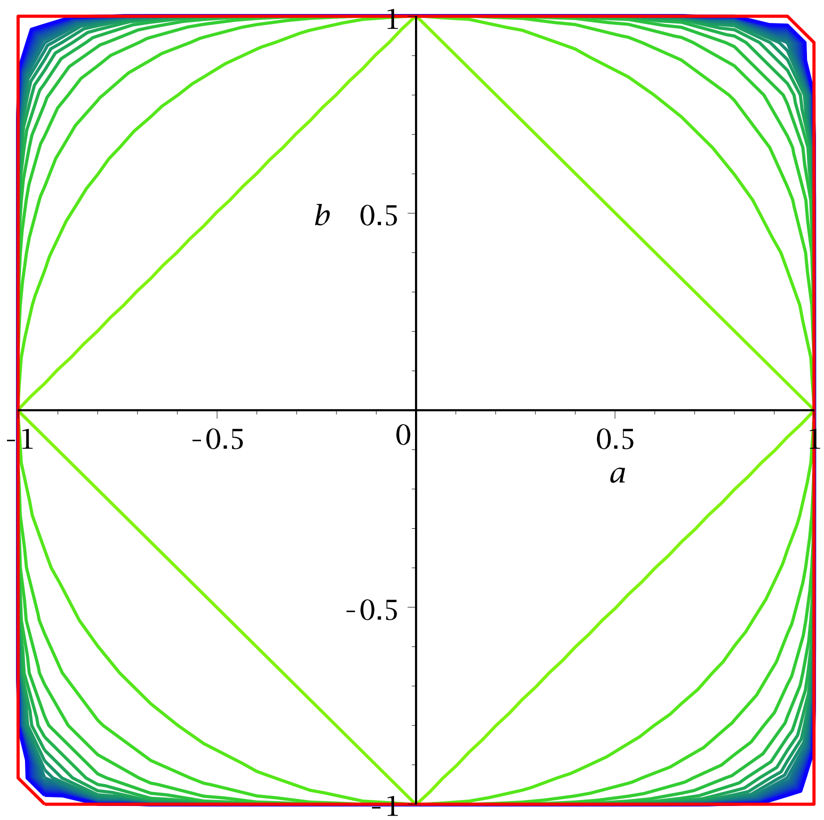
$$\| .. \|_2 : K_{konv}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup\left(\frac{|a_i|}{2^i}, i \in \mathbb{N}\right)$$

nicht äquivalent sind.

Hinweis: Vergleiche die beiden Normen auf der Menge der Zeilen der unendlichen Einheitsmatrix.

Die 1-Norm $(a, b) \mapsto |a| + |b|$ verallgemeinert sich zu einer Familie von Normen: Die p-Norm ist definiert als $(a, b) \mapsto \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}$. Die Euklidische Norm ist dann auch die 2-Norm $(a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$. Wegen des Verhaltens der Einheitsbälle im folgenden Bild wird die Maximumsnorm auch oft die ∞-Norm genannt.

```
> m:=20:
  l:=map(n->implicitplot(sqrt(abs(a)^n+abs(b^n))^(1/n)-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=ColorTools[Color]([1/(n+1),(m-n)/m,n/m])),[$1..m]):
  l:=[op(l),implicitplot(max(abs(a),abs(b))-1,a=-2..2,b=-2..2,grid=[31,31],color=red)]:
  display(l);
```



Konvergente Folgen in normierten Räumen

Aufgaben: 3

```
> restart;
  with(plots):
```

Grenzwerte und Banachräume

MATH: Sei $(V, \| \|)$ ein normierter Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Folge $a \in V^{\mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls ein $g \in V$ existiert, genannt der **Grenzwert** der Folge, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\| a_i - g \| < \varepsilon$$

für alle $i \geq n_0$.

DENKANSTOSS: Folgere mit Hilfe der Eigenschaften einer Norm, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert.

Beispiel: Die Folge

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{2 \times 2}: \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} A^i$$

ist bezüglich der Maximumsnorm konvergent für

```
> A:=1/3*<<1 | 1> , <1 | 1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

Betrachte dazu die Matrix B:

```
> B:=<<1 | 1> , <1 | 1>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

An den Potenzen

```
> map(i->A^i,[$1..5]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{8}{81} & \frac{8}{81} \\ \frac{8}{81} & \frac{8}{81} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{16}{243} & \frac{16}{243} \\ \frac{16}{243} & \frac{16}{243} \end{bmatrix} \right] \tag{3.1.3}$$

von A sieht man sehr einfach, dass für $i > 0$

$$A^i = \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \frac{1}{2} \cdot B$$

gilt. Nun ist

```
> sum((2/3)^i*1/2,i=1..infinity);
```

$$1 \tag{3.1.4}$$

und somit ist der Grenzwert

$$A^0 + B =$$

```
> <<2 | 1> , <1 | 2>>;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

Wir haben mit der Maximumsnorm der Komponenten gearbeitet, welche aber äquivalent zu jeder anderen Norm auf dem endlichdimensionalen =-Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist.

DENKANSTOSS: Seien $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ äquivalente Normen auf V. Eine Folge $a \in V^{\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $\| \ \|_1$ genau dann wenn sie bezüglich $\| \ \|_2$ konvergiert. In diesem Fall sind die Grenzwerte identisch.

MATH: Jede konvergente Folge ist eine **Cauchy-Folge**. Dabei heißt $a \in V^{\mathbb{N}}$

Cauchy-Folge, falls
zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|a_i - a_j\| < \varepsilon$$

für alle $i, j \geq n_0$.

MATH: Falls umgekehrt jede Cauchy-Folge eines normierten Raumes konvergent ist, heißt der Raum **vollständig** oder **Banachraum**. Endlichdimensionale normierte Räume sind stets vollständig.

Warum sind Banachräume wichtig? Der Banachsche Fixpunktsatz wird es uns später zeigen!

Beispiel für einen Banachraum unendlicher Dimension: Der Raum $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit der Maximumsnorm als Norm.

ÜBUNG [05]:

Begründe die Behauptungen des letzten Beispiels, d.h. zeige folgendes:
1) Die Maximumsnorm $f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ist wohldefiniert als Abbildung $C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (also: es wird ein Maximum angenommen).
2) Die Maximumsnorm ist eine Norm.
3) Alle Cauchyfolgen konvergieren gegen eine Grenzfunktion.
4) Diese Grenzfunktion liegt in $C([a, b], \mathbb{R})$. (Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz)

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel für Banachräume ist der Raum der quadratsummierbaren Folgen $l^2(\mathbb{R})$:

$$l^2(\mathbb{R}) := \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\Phi: \; l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot b_i$$

bzw. mit der hierdurch induzierten Norm. Dieser Raum ist das einfachste unendlichdimensionale Analogon des $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

ÜBUNG [06]:

1) Mach dir (zum Beispiel graphisch) klar, wie Folgen mit Elementen aus dem Banachraum $l^2(\mathbb{R})$ aussehen. Schreibe dazu hinreichend viele nicht-triviale Elemente hin.
2) Gib ein Beispiel einer konvergenten (aber nicht konstanten – das wäre zu

einfach) Folge in $l^2(\mathbb{R})$ an.
3) Gib in dem Banachraum $l^2(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt Φ eine beschränkte Folge an, die keine konvergente Teilfolge hat.

ÜBUNG [07]:

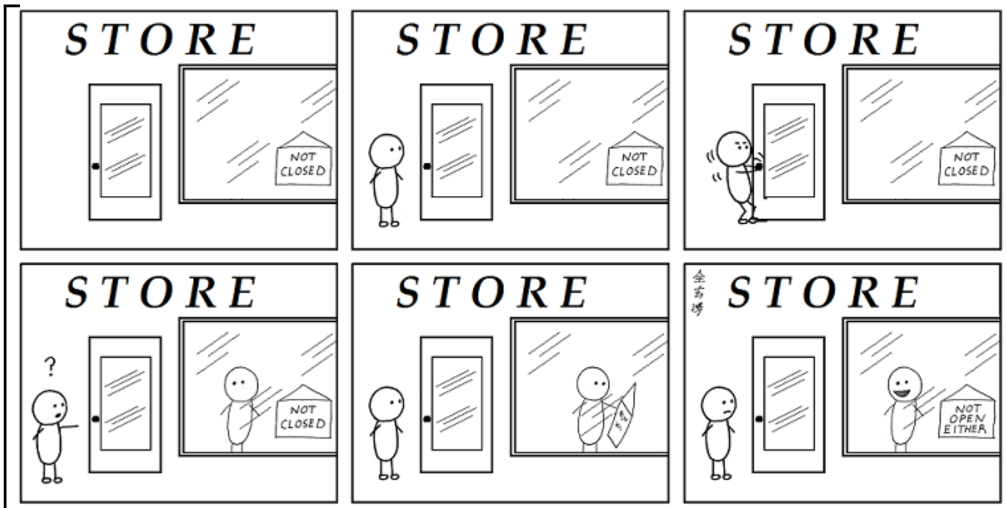
Finde zu einer Cauchyfolge $a_n \in l^2(\mathbb{R})$ einen Grenzwert $a \in \ \in l^2(\mathbb{R})$ und zeige, dass dieser auch in $l^2(\mathbb{R})$ liegt. Du brauchst die Konvergenz nicht zu zeigen.
Hinweis: Betrachte die Projektion π_k auf die k-ten Folgenglieder als Folge in $\mathbb{R}$.

Topologie

Aufgaben: 2

```
> restart;
```

Offene und abgeschlossene Mengen



Scumbag topologist
'opens' a store.

MATH: Durch die Norm eines normierten Vektorraumes V hat man eine Vorstellung von der Nähe zweier Punkte. Mengen, die mit jedem ihrer Punkte p alle Punkte von V, die sehr nahe bei p liegen, enthalten, heißen offen. Genauer:

$M \subseteq V$ heißt **offen**, falls

$$\forall\ p \in M\ \ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(p) > 0:\ \ B(p, \varepsilon) := \{q \in V \mid \|p - q\| < \varepsilon\} \subseteq M.$$

Komplemente offener Mengen heißen **abgeschlossene Mengen**.

ÜBUNG [08]:
1) Gib ein Beispiel für eine Teilmenge eines mindestens zwei-dimensionalen normierten Vektorraumes, die weder offen noch geschlossen ist. 2) Zeige: Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. 3) Gib ein Beispiel dafür, dass die Vereinung beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein muss. 4) Zeige: Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. 5) Gib ein Beispiel dafür, dass der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen nicht offen sein muss. 6) Zeige: Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Konvergente Folgen in topologischen Räumen

MATH: Allgemein definiert man einen **topologischen Raum** als eine Menge *M* zusammen mit einer Teilmenge $O \subseteq Pot(M)$ der Potenzmenge von *M*, so dass (M, O) die folgenden Bedingungen erfüllt:
1) Die leere Menge und M gehören zu O:
$M, \varnothing \in \mathrm{O}$.
2) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus O liegt wieder in O:
$(\forall\ i \in I: \mathrm{O}_i \in \mathrm{O}) \Rightarrow \cup_{i \in I} \mathrm{O}_i \in \mathrm{O}$
3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus O gehört zu O:
$(\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ i \in \{1,.., n\} : O_i \in \mathrm{O}) \Rightarrow \cap_{i=1}^{n} \mathrm{O}_i \in \mathrm{O}$

Die Mengen aus O heißen **offen**, ihre Komplemente in *M* **abgeschlossen**.

DENKANSTOSS: Definiere einen topologischen Raum ausgehend von den abgeschlossenen Mengen und zeige die Äquivalenz der beiden Definitionen.

BEISPIEL: *M* sei eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes $(V, \|\ \|)$. Als Topologie auf *M* definieren wir die Menge der Durchschnitte von *M* mit den offenen Teilmengen von *V*.

BEISPIEL: Auf einer beliebigen Menge M gibt es zwei besonders einfache (aber wichtige) Topologien: die diskrete Topologie (d.h. jede Teilmenge von M ist offen) und die Klumpentopologie (nur M und $\varnothing$ sind offen).

MATH: Man kann den Konvergenzbegriff von Folgen allgemein für topologische Räume definieren:
Die Folge $i \mapsto v_i \in M$ heißt **konvergent** gegen $m \in M$, falls jede offene Menge,

die m enthält (kurz **offene Umgebung** von m), auch v_i für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$ enthält.

ÜBUNG [09]:

Sei M eine Menge und $v \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge.

1) Sei M mit der Klumpentopologie versehen. Zeige, dass v konvergent gegen m ist für jedes $m \in M$.

2) Sei M mit der diskreten Topologie versehen. Was für Anforderungen muss v erfüllen, um konvergent gegen $m \in M$ zu sein?

3) Sei $a_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Diese habe bezüglich der üblichen Definition aus der Analysis I als Folge reeller Zahlen genau zwei Häufungspunkte $g, h \in \mathbb{Z}$ und sei beschränkt. Definiere durch Angabe der offenen Mengen oder durch Angabe der abgeschlossen Mengen - bearbeite hierfür aber den obigen Denkanstoß! - zwei Topologien $T_1, T_2 \subseteq Pot(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{Z}$ so, dass a_n in dem topologischem Raum $(\mathbb{Z}, T_1)$ konvergiert (gegen einen beliebigen Grenzwert) und in dem Raum $(\mathbb{Z}, T_2)$ nicht konvergent ist und die Topologien maximal bzw. minimal mit der Eigenschaft sind. Beweise in beiden Fällen, dass die Folge konvergiert bzw. dies nicht tun kann.