Gruppenoperationen und Stabilisatoren

Aufgaben: 7

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

Definition: Gruppen und Operationen

Wir möchten einige Aussagen der linearen Algebra unter einem anderen Aspekt betrachten und insbesondere affine Geometrie auf dem nächsten Worksheet machen. Hierzu bedienen wir uns Gruppen und Gruppenoperationen. Wir hatten bereits die Definition einer Gruppe gesehen, jedoch nichts damit gemacht. Um dies zu ändern, bedienen wir uns der Gruppenoperation, welche ein fundamentaler Begriff der Mathematik ist. Der Begriff der Gruppe ist nur wegen dieser Operationen eingeführt worden. Zunächst wiederholen wir die Definition der Gruppe:

MATH: Eine nicht-leere Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ heißt Gruppe, falls

1) $\cdot$ assoziativ ist,
2) ein eindeutiges Element $1 = 1_G \in G$ existiert sodass $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ für alle $g \in G$ und
3) für jedes $g \in G$ ein $h \in G$ existiert mit $gh = hg = 1$.

Eine Gruppe heißt **abelsch**, wenn $\cdot$ kommutativ ist - man schreibt dann meistens $+$ statt $\cdot$.

Weiter unten werden wir dann eine Verbindung zwischen Operationen und der linearen Algebra sehen. Zunächst benötigen wir jedoch eine wichtige Definitionen und Aussagen:

MATH: Eine Gruppe G **operiert** auf einer Menge M, falls eine Abbildung

$$G \times M \to M: (g, m) \mapsto gm$$

gegeben ist mit den folgenden Eigenschaften.

- $1\, m = m$ für alle $m \in M$ $\quad (1 = 1_G =$ Einselement der Gruppe G).
- $(gh)m = g(hm)$ für alle $g, h \in G, m \in M$.

In Worten:

- Jedes Element der Gruppe G induziert eine Abbildung von M in sich.
- Das Einselement der Gruppe induziert die Identitätsabbildung von M.
- Das Produkt zweier Gruppenelemente induziert die Komposition der beiden induzierten Abbildungen

  DENKANSTOSS: Eine Operation von G auf der Menge M induziert einen Gruppenhomomorphismus von G in die symmetrische Gruppe von M (S_M). Umgekehrt genauso.

MATH:

Für $m \in M$ heißt $Gm := \{gm \mid g \in G\}$ die **Bahn** von m unter G. Die Bahnen bilden eine Partition von M.

BEISPIEL:
S_3 operiert auf $\mathbb{F}_3^{3\times 1}$ durch
$S_3 \times \mathbb{F}_3^{3\times 1} \to \mathbb{F}_3^{3\times 1} : \left(\pi, \left(a_1, a_2, a_3\right)\right) \mapsto \left(a_{(\pi^{-1})(1)}, a_{(\pi^{-1})(2)}, a_{(\pi^{-1})(3)}\right)$.

ÜBUNG [01]:
Bestimme die Partition, welche durch die Bahnen der obigen Operation gegeben ist.

MATH:
Eine Abbildung $f: M \to X$ von M in irgendeine Menge X, die konstant auf den Bahnen ist, heißt **Invariante** der Gruppenoperation.

META-DENKANSTOSS: Es ist oft eine sehr interessante Frage, bei einer Äquivalenzrelation auf einer Menge zu überlegen, ob die Äquivalenzklassen Bahnen einer Gruppenoperation sind.

BEISPIEL: Die Gruppe S_n aller Permutationen der Menge $\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$ operiert in natürlicher Weise auf $\underline{n}$:

$S_n \times \underline{n} \to \underline{n} : (g, i) \mapsto g(i)$.

Sie operiert aber auch auf der Potenzmenge von $\underline{n}$:

$S_n \times \mathrm{Pot}(\underline{n}) \to \mathrm{Pot}(\underline{n}) : (g, M) \mapsto g(M) := \{g(i) \mid i \in M\}$.

Eine wichtige Partition von $\mathrm{Pot}(\underline{n})$ ist

$$\mathrm{Pot}(\underline{n}) = \biguplus_{i=0}^{n} \mathrm{Pot}_i(\underline{n})$$

mit $\mathrm{Pot}_i(\underline{n}) := \{M \subseteq \underline{n} \mid |M| = i\}$.
In der Tat sind die $\mathrm{Pot}_i(\underline{n})$ gerade die Bahnen der Operation von S_n auf $\mathrm{Pot}(\underline{n})$.
Mit anderen Worten, die Kardinalität $\mathrm{Pot}(\underline{n}) \to \{0, 1, \ldots, n\} : M \mapsto |M|$ ist eine Invariante der Gruppenoperation, also $|gM| = |M|$ für alle $M \in \mathrm{Pot}(\underline{n})$, die auf jeder Bahn einen anderen Wert annimmt.
Man spricht auch von einer (bahn)**trennenden Invarianten**.

ÜBUNG [02]:
Bestimme eine trennende Invariante für die Operation von S_3 auf $F_3^{3\times 1}$ aus Aufgabe 1.

DENKANSTOSS: Gibt es für jede Operation einer Gruppe G auf einer Menge M eine trennende Invariante?

Untergruppen, Stabilisatoren, Homomorphismen

MATH: Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt **Untergruppe** von G, falls gilt:

1) $U \neq \varnothing$,
2) $g, h \in U \Rightarrow g \cdot h^{-1} \in U$.

Wir schreiben dafür $U \leq G$.

BEISPIEL:
$S_n \leq S_{n+1}$
$GL(V) \leq S_V := \{ f: V \to V \mid f \text{bijektiv}\}$

MATH: Für $m \in M$ heißt

$$\mathrm{Stab}_G(m) := \{g \in G \mid gm = m\}$$

der **Stabilisator** von m in G. Der Stabilisator ist eine Untergruppe von G. Er operiert ebenfalls noch auf M, hat dort aber kleinere Bahnen, d. h. wir sehen mehr Stuktur. Beachte:

$$\mathrm{Stab}_G(gm) = g\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1} := \left\{ghg^{-1} \,\middle|\, h \in \mathrm{Stab}_G(m)\right\}.$$

ÜBUNG [03]:
Zeige die Behauptung: Der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(m)$ ist eine Untergruppe von G.

Wichtige Fälle von Operationen:
- **Transitive Operation**$Gm = M \; \forall \; m \in M$.
- **Treue Operation**: Der Schnitt aller Stabilisatoren ist $\{1\}$.
- **Reguläre Operation**: transitiv und alle Stabilisatoren sind gleich $\{1\}$.

DENKANSTOSS: Ist eine Operation transitiv und ein Stabilisator gleich $\{1\}$, so sind schon alle Stabilisatoren gleich $\{1\}$. Folgere dies aus der letzten Aussage.

DENKANSTOSS: Was ist der Stabilisator von $\{1, 2, \ldots, k\}$ in S_n bei der Operation auf $\mathrm{Pot}(\underline{n})$ für $k < n$?

ÜBUNG [04]:
Es sei G eine abelsche Gruppe, welche auf der Menge M operiert. Zeige: G operiert regulär auf $M \Leftrightarrow G$ operiert transitiv und treu auf M.

Gilt die Aussage auch für nicht-abelsche Gruppen? Beweise dies oder finde ein Gegenbeispiel.

MATH: Sind G und H Gruppen, so heißt eine Abbildung $f: G \to H$ ein **Homomorphismus** oder genauer **Gruppenhomomorphismus**, falls für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

Man spricht von einem **Monomorphimus**, **Epimorphimus** resp. **Isomorphismus**, falls f injektiv, surjektiv resp. bijektiv ist.

MATH: Operiert die Gruppe G auf der Menge M, so operiert sie auch auf

1) der Potenzmenge von M durch

$$G \times \mathrm{Pot}(M) \to \mathrm{Pot}(M) : (g, T) \mapsto gT := \{gt \mid t \in T\},$$

2) auf dem kartesischen Quadrat von M durch

$$G \times (M \times M) \to M \times M : (g, (m, n)) \mapsto g(m, n) := (gm, gn)$$

3) (allgemeiner) auf der n-ten kartesischen Potenz M^n von M durch

$$G \times M^n \to M^n : (g, (m_1, ..., m_n)) \mapsto (gm_1, ..., gm_n)$$

4) auf der Menge N^M der Abbildungen von M in eine beliebigen Menge N durch

$$G \times N^M \to N^M : (g, f) \mapsto fg^{-1}$$

mit

$$fg^{-1} : M \to N : m \mapsto f(g^{-1} m).$$

Insbesondere operiert also $GL(V)$ auf $V^* = K^V$ durch

$$GL(V) \times V^* \to V^* : (g, f) \mapsto fg^{-1}.$$

Im Kontext der linearen Algebra haben wir es häufig mit **linearen Operationen** auf Vektorräumen zu tun.

MATH: Eine Gruppe operiert **linear** auf M, falls M ein Vektorraum ist und für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\alpha(g) : M \to M : m \mapsto gm$$

linear ist. Oder äquivalent:
Eine Gruppe operiert **linear** auf M, falls M ein Vektorraum ist und es einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \to GL(M)$$

existiert mit:

$$gm = \varphi(g)(m).$$

In diesem Fall haben wir z. B. folgende abgeleitete Operationen von G:

1) auf dem Dualraum M^* von M durch

$$G \times M^* \to M^* : (g, \delta) \mapsto \delta \circ \alpha(g^{-1})$$

2) auf der Menge $\square(M)$ der Teilräume von M durch

$G \times T(M) \to \square(M) : (g, T) \mapsto gT := \{gt \mid t \in T\}$.

ÜBUNG [05]:

Ist die Operation von S_3 auf $F_3^{3 \times 1}$ aus Aufgabe 1 linear? Falls ja, so gib den Gruppenhomomorphismus $\varphi : S_3 \to GL\left(F_3^{3 \times 1} \right)$ an.

Operationen der GL(n,K)

Wir betrachten einige Ergebnisse aus der linearen Algebra aus Sicht der Gruppenoperationen:

ÜBUNG [06]:

Sei K ein Körper, V ein *endlich-dimensionaler* K-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V)$ (die Gruppe aller invertierbaren K-linearen Abbildungen auf V).
1.) Zeige: G operiert transitiv auf der Menge der Basen von V. (Hinweis: Denke an Basiswechsel.)
2.) Was sind die Bahnen von G auf $\square(V)$ (= Menge der Teilräume von V)? ($\mathrm{GL}(V)$ operiert auf V durch Anwenden der linearen Abbildung.)

MATH: Eine wichtige Gruppe ist

$$GL(n, K) := \{g \in K^{n \times n} \mid Det(g) \neq 0\}$$

aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper K mit der Matrixmultiplikation als Produkt (**generelle lineare Gruppe** vom Grad n). Weiter spielt unten noch das **direkte Produkt**

$$GL(n, K) \times GL(m, K) := \{ (g, h) \mid g \in GL(n, K), h \in GL(m, K) \}$$

der Gruppen $GL(n, K)$ und $GL(m, K)$ eine Rolle. Darunter versteht man das kartesische Produkt der Gruppen mit der komponentenweisen (diagonalen) Multiplikation als Produkt. Man schreibt oft auch $GL_n(K)$ anstatt $GL(n, K)$.

DENKANSTOSS: Ist das direkte Produkt wieder eine Gruppe?

In der folgenden Aufgabe ist die Gelegenheit gegeben, große Teile des 1. Semesters Lineare Algebra sehr prägnant zusammenzufassen.

ÜBUNG [07]:

Zeige:
a)
1.) $GL(n, K) \times K^{n \times m} \to K^{n \times m} : (g, A) \mapsto gA$ ist eine Gruppenoperation.
2.) Der Rang ist eine Invariante dieser Operation.

3.) Zeige oder widerlege: Diese Invariante trennt die Bahnen (d.h. zwei Matrizen liegen **genau dann** in derselben Bahn, wenn sie denselben Rang haben).
4.) Wie kann man mit dem Gaußschen Algorithmus feststellen, ob zwei Matrizen aus $K^{n \times m}$ in derselben Bahn liegen?

b)
1.) $(GL(n, K) \times GL(m, K)) \times K^{n \times m} \to K^{n \times m} : ((g, h), A) \mapsto gAh^{-1}$ ist eine Gruppenoperation.
2.) Der Rang ist eine Invariante dieser Operation.
3.) Zeige oder widerlege: Diese Invariante trennt die Bahnen.

BEISPIEL:
$GL(n, K) \times K^{n \times n} \to K^{n \times n} : (g, A) \mapsto gAg^{-1}$ ist eine Gruppenoperation.
Eine trennende Invariante ist hier die Jordannormalform, welche wir bereits kennen.