Gruppenoperationen und Stabilisatoren

Aufgaben: 2

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

Operationen der GL(n,K)

MATH: Die Gruppe G operiere auf zwei Mengen M und N. Die Operation auf M sei transitiv und es sei $m \in M$. Dann sind die Bahnen von G auf dem kartesichen Produkt $M \times N$ in Bijektion mit den Bahnen des Stabilisators $\mathrm{Stab}_G(m)$ auf N vermöge

$$M \times N \supseteq G(m, n) \;\leftrightarrow\; \mathrm{Stab}_G(m)\, n \subseteq N$$

DENKANSTOSS: Beweise diese Aussage.

Wir betrachten einige Ergebnisse aus der linearen Algebra aus Sicht der Gruppenoperationen:

ÜBUNG [01]:
Sei K ein Körper, V ein *endlich-dimensionaler* K-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V)$ (die Gruppe aller invertierbaren K-linearen Abbildungen auf V). 1.) Zeige: G operiert transitiv auf der Menge der Basen von V. (Hinweis: Denke an Basiswechsel.) 2.) Was sind die Bahnen von G auf $\mathfrak{T}(V)$ (= Menge der Teilräume von V)? ($\mathrm{GL}(V)$ operiert auf V durch Anwenden der linearen Abbildung.)

MATH: Eine wichtige Gruppe ist

$$GL(n, K) := \{g \in K^{n \times n} \mid Det(g) \neq 0\}$$

aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper K mit der Matrixmultiplikation als Produkt (**generelle lineare Gruppe** vom Grad n). Weiter spielt unten noch das **direkte Produkt**

$$GL(n, K) \times GL(m, K) := \{\ (g, h) \mid g \in GL(n, K), h \in GL(m, K)\}$$

der Gruppen $GL(n, K)$ und $GL(m, K)$ eine Rolle. Darunter versteht man das kartesische Produkt der Gruppen mit der komponentenweisen (diagonalen) Multiplikation als Produkt. Man schreibt oft auch $GL_n(K)$ anstatt $GL(n, K)$.

DENKANSTOSS: Ist das direkte Produkt wieder eine Gruppe?

In der folgenden Aufgabe ist die Gelegenheit gegeben, große Teile des 1. Semesters Lineare Algebra sehr prägnant zusammenzufassen.

ÜBUNG [02]:
Zeige: a)

1.) $GL(n, K) \times K^{n \times m} \to K^{n \times m}: (g, A) \mapsto gA$ ist eine Gruppenoperation.
2.) Der Rang ist eine Invariante dieser Operation.
3.) Zeige oder widerlege: Diese Invariante trennt die Bahnen (d.h. zwei Matrizen liegen **genau dann** in derselben Bahn, wenn sie denselben Rang haben).
4.) Wie kann man mit dem Gaußschen Algorithmus feststellen, ob zwei Matrizen aus $K^{n \times m}$ in derselben Bahn liegen?

b)
1.) $(GL(n, K) \times GL(m, K)) \times K^{n \times m} \to K^{n \times m}: ((g, h), A) \mapsto gAh^{-1}$ ist eine Gruppenoperation.
2.) Der Rang ist eine Invariante dieser Operation.
3.) Zeige oder widerlege: Diese Invariante trennt die Bahnen.

BEISPIEL:
$GL(n, K) \times K^{n \times n} \to K^{n \times n}: (g, A) \mapsto gAg^{-1}$ ist eine Gruppenoperation.
Eine trennende Invariante ist hier die Jordannormalform, welche wir bereits kennen.

Allgemeine affine Räume

Aufbauend auf den Abschnitten: "Affine Gruppe"

Aufgaben: 1

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

Allgemeine affine Räume

MATH: Auf der Menge $\mathcal{P}$ operiere ein K-Vektorraum V via $\tau: V \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ regulär. Dann heißt das Tupel $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, V, \tau)$ **affiner Raum**. Dabei heißt V der **Translationraum**.

```
> f := x -> x^19+3*x^18+2*x^17+2*x^13+6*x^12+4*x^11-2*x^3-5*x^2-x+3 mod 3;
```

$$f := x \to (x^{19} + 3x^{18} + 2x^{17} + 2x^{13} + 6x^{12} + 4x^{11} - 2x^3 - 5x^2 - x + 3) \bmod 3 \quad \textbf{(2.1.1)}$$

```
> g := x -> Determinant(Matrix(4,4,[0,1,x,2,2,0,0,1,1,2,0,1,0,1,0,1]))+1 mod 3;
```

$$g := x \to (\mathit{LinearAlgebra}{:-}\mathit{Determinant}(\mathit{Matrix}(4, 4, [0, 1, x, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 1])) + 1) \bmod 3 \quad \textbf{(2.1.2)}$$

```
> h := x -> x^21-7*x^19+21*x^17-35*x^15+35*x^13-21*x^11+7*x^9-x^7+x^2+1 mod 3;
```

(2.1.3)

$$h := x \rightarrow \left(x^{21} - 7\,x^{19} + 21\,x^{17} - 35\,x^{15} + 35\,x^{13} - 21\,x^{11} + 7\,x^{9} - x^{7} + x^{2} + 1\right) \;\mathbf{mod}\; 3 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Die obigen Funktionen seien Abbildungen von $\mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3$.

ÜBUNG [03]:

Es sei $K := \mathbb{F}_3$. Es sei $V := \langle f, g \rangle$ ein K-Vektorraum.

1.) Bestimme die Dimension d von V.

Ferner sei

$M := \{Di8{:}30Raum003, Di8{:}30Raum242, Di10{:}15Raum003, Di12{:}15Raum003, Di14{:}15Raum242, Di16{:}15Raum003, Di16{:}15Raum242, Di18{:}15Raum003, Mi8{:}30Raum003\}$.

Es operiere V treu auf der Menge M via τ gegeben durch folgende Tabelle:

G \ M	*Di8:30Raum003*	*Di8:30Raum242*	*Di10:15Raum003*	*Di12:15Raum003*	*Di14:15Raum242*	*Di16:15Raum003*	*Di16:15Raum242*	*Di18:15Raum003*	*Mi8:30Raum003*
f	*Di10:15Raum003*	*Mi8:30Raum003*	*Di16:15Raum242*	*Di18:15Raum003*	*Di8:30Raum242*	*Di12:15Raum003*	*Di8:30Raum003*	*Di16:15Raum003*	*Di14:15Raum242*
g	*Di12:15Raum003*	*Di8:30Raum003*	*Di18:15Raum*	*Di8:30Raum242*	*Di16:15Raum242*	*Di14:15Rau*	*Di16:15Raum003*	*Mi8:30Raum003*	*Di10:15Raum003*

			0\ 0\ 3	*m\ 2\ 4\ 2*

2.) Zeige, dass $\mathbb{A} := (M, V, \tau)$ ein affiner Raum über K ist.
3.) Bestimme den Translationsvektor von $Mi8{:}30Raum003$ zu $Di8{:}30Raum003$ als Element von V.
4.) Es sei $\alpha(f) = g$ und $\alpha(g) = h$. Zeige, dass sich α zu einem wohldefinierten Endomorphismus von V fortsetzen lässt.
5.) Es sei durch $F(Di16{:}15Raum003) = Di8{:}30Raum242$ und den linearen Anteil α eine affine Abbildung gegeben. Bestimme das Bild von $Di16{:}15Raum242$ unter F.
6.) Bestimme einen Isomorphismus von V nach $K^{d \times 1}$.
7.) Bestimme ein affines Koordinatensystem, also einen affinen Isomorphismus von M nach $K^{d \times 1}$, wobei deine Testatgruppe auf das neutrale Element von $K^{d \times 1}$ abgebildet wirst.

Analyse von Geradenpaaren im 3-dim. affinen Raum

Aufgaben: 7

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> Aff:=proc(n::posint,s)
    local M;
    M:=Matrix(n,n+1,(i,j)->s[i,j]);
    M:=Matrix(<M,Matrix(1,n+1)>);
    M[n+1,n+1]:=1;
    return M;
  end proc:
> S:=Aff(3,s);
```

$$S := \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & s_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Der Stabilisator einer Gerade

Als nächstes Objekt im affinen Raum nach Punkten bieten sich Geraden an. Wir wollen die affine Geometrie der Geraden unter gruppentheoretischen Gesichtspunkten anfangen zu studieren.

Zur Erinnerung: $\varphi : V \to K$ war eine Linearform und der affine Raum V_1 war wie folgt definiert: $V_1 := \left(\varphi^{-1}(\{1\}), Kern(\varphi), +_V\right)$.

MATH: Eine Teilmenge $G \subseteq V_1$ des affinen Raumes V_1 ist ein affiner Teilraum von V_1, wenn

$$G = \langle G \rangle \cap V_1 \subseteq V_1.$$

Ist die Dimension des Vektorraumerzeugnisses $\langle G \rangle$ gleich 2, so heißt G eine **Gerade**. Allgemein heißt

$$\mathrm{Dim}(\langle G \rangle) - 1$$

die **affine Dimension** von G. Ein affiner Teilraum G ist wieder ein affiner Raum mit Translationsraum $\langle G \rangle \cap \mathrm{Kern}(\varphi)$, dessen Vektorraumdimension dann natürlich gleich der affinen Dimension von G ist.

DENKANSTOSS: $\mathrm{Aff}(V_1)$ operiert auf der Menge der affinen Teilräume von V_1. Zwei affine Teilräume liegen genau dann in einer Bahn, wenn sie dieselbe affine Dimension haben, d. h. die Dimension ist eine trennende Invariante der Operation. (Man erinnere sich hierbei an Aufgabe 1 aus dem Abschnitt "Affine Gruppe", wo die Bahnen der generellen linearen Gruppe auf der Menge der Teilräume betrachtet wurden.)

Hier ist eine affine Gerade :

```
> G:=Vector(4,[lambda,0,0,1]);
```

$$G := \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

```
> S.G;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda s_{1,1} + s_{1,4} \\ \lambda s_{2,1} + s_{2,4} \\ \lambda s_{3,1} + s_{3,4} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

Dies ist die allgemeine Form einer Geraden, wobei die s_{ij} fest gewählt sind und λ als Parameter ganz K durchläuft. (Vorsicht! Wie müsste man genauer sagen?) Also ist $\mathrm{Aff}(V_1)$ transitiv auf der Menge aller Geraden. Etwas übersichtlicher würde man schreiben

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} \\ s_{2,1} \\ s_{3,1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda + \begin{bmatrix} s_{1,4} \\ s_{2,4} \\ s_{3,4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

aber wir können Maple nicht davon überzeugen.

Als nächstes stellt sich also die Frage nach den Geradenpaaren: Wie viele Bahnen macht $\mathrm{Aff}(V_1)$ auf der Menge der Geradenpaare? Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Bahnen des Stabilisators SG der obigen Gerade G auf der Menge aller Geraden. (**DENKANSTOSS**: Warum?)

Bestimmen wir also den Stabilisator von G: Es müssen

```
> (S.G)[2]=0;
  (S.G)[3]=0;
```

$$\lambda s_{2,1} + s_{2,4} = 0$$
$$\lambda s_{3,1} + s_{3,4} = 0 \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

gelten für alle $\lambda \in K$. Also

```
> SG:=subs([s[2,1]=0,s[2,4]=0,s[3,1]=0,s[3,4]=0],S);
```

$$SG := \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} \\ 0 & s_{2,2} & s_{2,3} & 0 \\ 0 & s_{3,2} & s_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

```
> SG.G,G;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda s_{1,1} + s_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

Beachte: Für alle $s_{1,1} \neq 0$ ist dies zweimal dieselbe Gerade!

ÜBUNG [04]:

Zeige:
1.) Der Stabilisator $SG := \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(V_1)}(G)$ von G in $\mathrm{Aff}(V_1)$ operiert auf der Gerade G und induziert dort alle affinen Transformationen der Geraden G, d.h. $SG = \mathrm{Aff}(G)$. (Hinweis: Überlege genau, was $\mathrm{Aff}(G)$ ist.)
2.) Die Bahnen von SG auf ganz V_1 sind G und $V_1 - G$.

Parallele Geraden

MATH: Jede Gerade hat einen eindimensionalen Translationsraum. Unter affinen Transformationen bildet sich dieser mit dem linearen Anteil der affinen Transformation ab.

Wir müssen also zuerst die Bahnen von SG auf der Menge der eindimensionalen Teilräume von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ bestimmen:

```
> TG:=copy(G):TG[4]:=0:TG;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

```
> SG.TG;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,1}\,\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

Also wie erwartet bleibt der Translationsraum TG von G fest unter SG.

MATH: Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie denselben Translationsraum haben.

Wir haben gerade gesehen: Parallelität von Geraden bleibt unter affinen Abbildungen erhalten. Wieviele Bahnen gibt es unter diesen?

Der Stabilisator in SG von TG (bei der Operation von SG auf den 1-dim. Teilräumen von $\mathrm{Kern}(\varphi)$) ist offenbar ganz SG. SG operiert aber transitiv auf $V_1 - G$. Da eine Gerade durch ihren Translationsraum und einen ihrer Punkte festgelegt ist, schließen wir: SG ist transitiv auf der Menge aller Geraden, die parallel zu G sind, aber von G verschieden.

Sich schneidende Geraden

Wir fahren fort mit der Analyse der Operation von SG auf der Menge der 1-dimensionalen Teilräume von $\mathrm{Kern}(\varphi)$.

```
> TG2:=Vector(4,[0,mu,0,0]);
```

$$TG2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

Dies ist ein solcher Teilraum. Wir wenden SG an:

```
> SG.TG2;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,2}\,\mu \\ s_{2,2}\,\mu \\ s_{3,2}\,\mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

Man sieht: SG operiert transitiv auf der Menge aller 1-dim. Teilräume von $\mathrm{Kern}(\varphi)$, welche von *TG* verschieden sind.

ÜBUNG [05]:
Begründe letzteres genau!

Wir können also davon ausgehen, dass jede SG-Bahn aus der Menge der zu G nicht parallelen Geraden einen Vertreter hat, dessen Translationsraum $TG2$ ist:

```
> TG2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Jetzt müssen wir den Stabilisator $STG2$ von $TG2$ in SG ausrechnen und seine Bahnen auf V_1 ansehen.

```
> SG.TG2;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,2}\,\mu \\ s_{2,2}\,\mu \\ s_{3,2}\,\mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

```
> STG2:=subs([s[1,2]=0,s[3,2]=0],SG);
```

$$STG2 := \begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & s_{1,3} & s_{1,4} \\ 0 & s_{2,2} & s_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & s_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

Damit haben wir den Stabilisator (zur Erinnerung: er lässt sowohl G als auch $TG2$ fest):

```
> STG2.<lambda,0,0,1>,STG2.<lambda,0,0,0>,STG2.<0,mu,0,0>;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda s_{1,1} + s_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{1,1} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s_{2,2} \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

Was passiert nun, wenn wir $STG2$ auf den Punkt

```
> P2:=Vector(4,[0,0,0,1]);
```

$$P2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

anwenden?

```
> STG2.P2;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

Diese Punktmenge ist wieder die Gerade G, da $s_{1,4}$ beliebig ist.

ÜBUNG [06]:
Folgere aus dem vorangegangenen, dass SG transitiv auf der Menge aller Geraden ist, die G in genau einem Punkt schneiden.

Was bleibt?

Windschiefe Geraden

MATH: Zwei Geraden heißen **windschief**, falls sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

Wir wollen zeigen, dass SG transitiv auf der Menge aller Geraden, die zu G windschief sind, operiert. Zu dem Zweck schauen wir uns die Bahnen von $STG2$ auf der Menge V_1 vermindert um die bereits abgehandelte Ebene an, da die Geraden, die in dieser Ebene liegen, entweder parallel zu G sind oder G schneiden:

```
> P3:=Vector(4,[0,0,1,1]);
```

$$P3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

```
> STG2;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & s_{1,3} & s_{1,4} \\ 0 & s_{2,2} & s_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & s_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

```
> STG2.P3;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,3} + s_{1,4} \\ s_{2,3} \\ s_{3,3} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.3}$$

ÜBUNG [07]:

1.) Zeige: $STG2$ operiert transitiv auf der Menge aller Punkte außerhalb der Ebene definiert durch "dritte Koordinate = 0".
2.) Folgere: Jede zu G windschiefe Gerade liegt in der SG-Bahn von

```
> P3+TG2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

Zusammenfassend haben wir: Die Bahnen des Stabilisators von G auf der Menge aller Geraden in V_1 sind repräsentiert durch

```
> G,P3+TG,P2+TG2,P3+TG2;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

Oder anders ausgedrückt:

MATH: Die Operation von $\mathrm{Aff}(V_1)$ auf der Menge der Paare von Geraden hat folgende Bahnen:
1) Paare gleicher Geraden,
2) Paare paralleler, aber unterschiedlicher Geraden,
3) Paare verschiedener sich schneidender Geraden,
4) Paare windschiefer Geraden.

Paare windschiefer Geraden sind offenbar der generische Fall, also der Fall, der per Zufall normalerweise auftreten sollte. Wir wollen ihn deshalb weiter analysieren. Zu dem Zweck müssen wir den Schnitt der Stabilisatoren von G und von $P3+TG2$ bilden. Wir wissen schon, dass dies eine Untergruppe von $STG2$ ist, also brauchen wir nur noch den Stabilisator von $P3+TG2$ in $STG2$ zu bestimmen.

```
> STG2;
```

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & s_{1,3} & s_{1,4} \\ 0 & s_{2,2} & s_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & s_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

```
> P3+TG2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

```
> STG2.(P3+TG2);
```

(3.4.8)

$$\begin{bmatrix} s_{1,3} + s_{1,4} \\ \mu\, s_{2,2} + s_{2,3} \\ s_{3,3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

```
> SGG:=subs([s[1,3]=-s[1,4],s[3,3]=1],STG2);
```

$$SGG := \begin{bmatrix} s_{1,1} & 0 & -s_{1,4} & s_{1,4} \\ 0 & s_{2,2} & s_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

```
> P3+TG2,SGG.(P3+TG2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \mu\, s_{2,2} + s_{2,3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

```
> G,SGG.G;
```

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda\, s_{1,1} + s_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.11)$$

Wir sehen also, unser Geradenpaarstabilisator operiert durch affine Transformationen auf beiden Geraden. Man kann sogar diese beiden affinen Transformationen unabhängig voneinander vorgeben und bekommt dann ein eindeutig bestimmtes Element aus dem Stabilisator.

ÜBUNG [08]:

Bestimme alle Bahnen von SGG auf V_1 und interpretiere das Ergebnis geometrisch.
(Hinweis: SGG stabilisiert (wie im Laufe der vergangenen Abschnitte gezeigt) den von TG und $TG2$ aufgespannten Translationsraum, sowie die von diesem Raum und dem Punkt $(0, 0, 0, 1)$ aufgespannte Ebene - benutze diese Überlegung, um eine Idee zu erhalten, wie die Bahnen aussehen.)

Paare von Geraden und Ebenen

ÜBUNG [09]:

Bestimme die Bahnen des Stabilisators SG auf der Menge aller Ebenen.

(Hinweis: Am einfachsten repräsentiert man eine Ebene durch eine Zeile Z, so dass die Ebene der Schnitt von $\mathrm{Kern}(Z)$ mit dem affinen Raum ist. Beachte, Z ist eindeutig bis auf Vielfache.)

ÜBUNG [10]:

Begründe warum nach Bearbeitung der Aufgabe 09 ohne neu zu rechnen die Bahnen des Stabilisators einer Ebene auf der Menge aller Geraden in unserem dreidimensionalen affinen Raum bekannt sind. Gib diese Bahnen an.