1. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Janet-Algorithmus)
Betrachte das System $L := \{x^2y^2 - xy,\ x^3y^2 - xy^3 + 2\}$ und sei $A := \mathbb{R}[x,y]/\langle L\rangle$.

a) Zeige: $\dim(A) \leq 3$.

b) Gib einen $\mathbb{R}$-Algebren-Monomorphismus $A \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ an und schließe, dass $\dim(A) = 3$.

c) Bestimme die Varietät $V(L)$ und gib einen $\mathbb{R}$-Algebren-Isomorphismus von A in die Algebra der Diagonalmatrizen in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ an. Wie hängt dieser mit der Abbildung aus (b) zusammen?

d) Gib alle Potenzreihenlösungen für A an.

e) Zeige, dass die Menge der Potenzreihenlösungen ein Modul für A ist.

Aufgabe 2.
Sei $L \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]$ mit zugehörigem Differentialgleichungssystem Δ.
Zeige für $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in V(L) \ \Leftrightarrow\ e^{\sum a_i x_i} \text{ ist Lösung von } \Delta.$$

.

Aufgabe 3.
Sei $L \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]$ und $A := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\langle L\rangle$ endlich dimensional. Zeige:

a) $|V(L)| \leq \dim(A)$. (Hinweis: Jedes $a \in V(L)$ definiert einen $\mathbb{C}$-Algebrenepimorphismus $A \to \mathbb{C}$.)

b) $|V(L)| = \dim(A)$ gilt, falls $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$. (Erinnerung: Das Radikal einer kommutativen Algebra besteht aus den nilpotenten Elementen.)

c) Für $L = \{x^2 + y^2,\ x^3 + y^3\} \subseteq \mathbb{C}[x,y]$ ist $V(L) = \{(0,0)\}$ und die Dimension des Lösungsraumes des zugehörigen Differentialgleichungssystems $\Delta = \{u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u_{xxx} + u_{yyy} = 0\}$ ist größer als 1, nämlich gleich der Dimension von $\mathbb{C}[x,y]/\langle L\rangle$.

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2002, in der Übung.