3. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Graduierte bzw. filtrierte Hilbertpolynome)
Es gilt: Sei R eine graduierte Noethersche K-Algebra (kmE) mit $\dim_K(R_0)$ endlich und M ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Dann sind die Hilbertreihen von R und M rationale Funktionen, also in $\mathbb{Q}(t)$. (vgl. Satz 1.31)

a) Zeige: Es gibt Polynome $G(t), F(t) \in \mathbb{Q}[t]$, so dass für hinreichend große $d \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$\dim_k(M_d) = G(d) \qquad \text{und } \dim_k(\oplus_{i \le d} M_i) = F(d).$$
Diese beiden Polynome heißen (graduierte bzw. filtrierte) Hilbertpolynome.

b) Bestimme $G(t)$ und $F(t)$ für das System $\{xy^3, yz^2, xyz\} \subseteq \mathrm{Mon}(\mathbb{R}[x,y,z])$ aus Übung 2, Aufgabe 1.

Aufgabe 2. (Graduierte Ringe und Moduln)
Sei $G \le GL_n(K)$ eine Matrixgruppe und $R := K[x_1, \ldots, x_n]$ mit der natürlichen Graduierung. (Identifiziere hierbei $K^{n\times 1}$ mit R_1.)

a) Zeige: Für $g = (g_{ij}) \in G$ definiere $g(x_j) := \sum\limits_{i=1}^{n} g_{ij} x_i$. Zeige: G operiert auf R durch K-Algebrenautomorphismen mit $gp(x_1, \ldots, x_n) = p(gx_1, \ldots, gx_n)$ für alle $g \in G$ und $p(x_1, \ldots, x_n) \in R$. (Hinweis: Zu zeigen sind also Wohldefiniertheit, Operationseigenschaft, Additivitat und Multiplikativität.)

b) Zeige weiter: $R^G := \{p \in R \,|\, gp = p \text{ für alle } g \in G\}$ ist ein graduierter Ring, d.h.
$$R^G = \bigoplus_{i \ge 0} (R^G \cap R_i).$$

c) Sei $\mu : g \to K^*$ ein Homomorphismus. Zeige: Dann ist $R^G_\mu := \{p \in R \,|\, gp = \mu(g)p\}$ ein graduierter R^G-Modul.

d) Sei nun $n = 3$ und
$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong S_3$$
und $\mu : G \to K^* : g \mapsto sgn(g)$ das Signum.
Zeige: $R^{S_3} = K[s_1, s_2, s_3]$ mit $s_1 = x+y+z$, $s_2 = xy+xz+yz$ und $s_3 = xyz$ (elementarsymmetrische Polynome).
$R^{S_3}_{sgn} = K[s_1, s_2, s_3]d = \langle d \rangle_{R^{S_3}}$ mit $d = (x-y)(x-z)(y-z)$
und $R^{A_3} = R^{S_3} \oplus R^{S_3}_{sgn}$. Gib auch die Hilbertreihen an.
(Hinweis zu $R^{S_3}_{sgn}$: Benutze, dass $K[s_1, s_2, s_3]$ faktoriell ist und zeige zunächst, dass $d^2 = -27{s_3}^2 - 4{s_2}^3 + 18 s_1 s_2 s_3 + {s_1}^2 {s_2}^2 - 4 {s_1}^3 s_3$ irreduzibel in $K[s_1, s_2, s_3]$ ist.)

Abgabe: Donnerstag, 14.11.2002, in der Übung.