4. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Schnitt von Quadriken)
Gegeben seien die drei Quadriken $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $xy - yz = 2$ und $y^2 - x^2 = xz$. Zeige unter Benutzung des Janet-Algorithmus, dass diese Quadriken genau acht gemeinsame Punkte (über den komplexen Zahlen) besitzen. (Hinweis: Das Maple-Paket `Involutive` darf benutzt werden.)

Aufgabe 2. (Das Dreifarbenproblem)

a) Zeige: $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\left\langle {x_i}^3 - 1 \,|\, i = 1, \ldots, n \right\rangle$ ist halbeinfach von der Dimension 3^n. (Benutze char($\mathbb{C}$)$= 0$)

b) Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Pot}_2(\underline{n})$ mit $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$ ein ungerichteter Graph auf n Punkten. Eine zulässige 3-Färbung von $\mathcal{G}$ (d.h. eine Färbung, so dass benachbarte Ecken verschiedene Farben erhalten) ist eine Abbildung $\varphi : \underline{n} \to \{1, \xi, \xi^2\}$, $(\xi^2 + \xi + 1 = 0)$ mit $\varphi(i) \neq \varphi(j)$, falls $\{i, j\} \in \mathcal{G}$. (Dass die Farben durch dritte Einheitswurzeln repräsentiert werden, stellt keine Einschränkung dar.) Ordne dem Graphen eine $\mathbb{C}$-Algebra zu durch
$A(\mathcal{G}) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\left\langle \left\{{x_i}^3 - 1 \,|\, i = 1, \ldots, n\right\} \cup \left\{{x_i}^2 + x_i x_j + {x_j}^2 \,|\, \{i, j\} \in \mathcal{G}\right\}\right\rangle$.
Zeige: Die Dimension von $A(\mathcal{G})$ ist gleich der Anzahl der zulässigen 3-Färbungen von $\mathcal{G}$.
(Hinweis: Zeige, dass für $x, y \in \{1, \xi, \xi^2\}$ gilt $x \neq y \Leftrightarrow x^2+xy+y^2 = 0$, und benutze Teil (a), d.h. jede Lösung des durch $A(\mathcal{G})$ gegebenen Gleichungssystems ist eine Färbung.)

c) Bestimme die Anzahl der möglichen Färbungen für $n = 8$ und $\mathcal{G}$ gegeben durch $\mathcal{G} := \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}\}$.

d) Bestimme die Anzahl der möglichen Färbungen für $n = 9$, $\mathcal{G} := \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{5, 6\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}\}$ und zeige, dass es für jedes Paar $\{i, j\} \in \mathrm{Pot}_2(\underline{9})$ außer $\{i, j\} = \{2, 6\}$ eine Färbung gibt, bei der x_i und x_j verschiedene Farben annehmen.

e) Füge im Graphen aus Teil (d) eine Kante zwischen x_1 und x_3 hinzu und vergleiche die Anzahl der nun möglichen Färbungen mit dem Ergebnis zuvor.

Hinweis zu (c),(d),(e): Benutze ggf. auch die `Involutive`-Befehle `InvolutiveBasisFast` und `AssertInvBasis`, und verwende `PolInvReduce`, um Färbungen von Ecken zu vergleichen.

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2002, in der Übung.