7. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Lokalisierung)

a) Zeige: Der Gruppenring von $(\mathbb{Z}^n, +)$ ist ein Bruchring $R = S^{-1}K[x_1, \ldots, x_n]$ für eine geeignete Menge S.

b) Gib eine endliche Präsentation von R an.

c) Bestimme die Hilbertreihe der Graduierung der Lokalisierung $Gr(R_I)$ mit $I = \langle x_1 - 1, \ldots, x_n - 1 \rangle$.

Hinweis: Experimentiere erst für $n = 1, 2, 3$ mit Hilfe von `Involutive` und führe dann den Beweis für allgemeine n durch. Benutze die allgemeinen Sätze über Bruchringe und Lokalisierungen.

Aufgabe 2. (Algorithmus von Mora)
Gegeben sei $L := \{xy^2 + y^4, x^2y + x^4\}$ und $I := \langle x, y \rangle$. Überprüfe, ob $x^3y^2 - y^3x^2$ in der Lokalisierung $\langle L \rangle_I$ liegt.
Hinweis: Verwende Algorithmus 2.37

Aufgabe 3. (Annullatoren)

a) Bestimme $\mathrm{Ann}(m)$ für $m = x^2 + z^2 + \langle L \rangle \in \mathbb{R}[x, y, z]/\langle L \rangle$ und $L = \{x^5 + x^3z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 - x^2y + z^3, z^3 - x^2y\}$ und entscheide, ob es sich um ein echtes Ideal handelt.

b) Formuliere (und beweise) einen Algorithmus zur Bestimmung von $\mathrm{Ann}(m)$ für ein $m \in K[x_1, \ldots, x_n]/\langle L \rangle$ mit $L \subset K[x_1, \ldots x_n]$ endlich. Inwieweit ist mit diesem Algorithmus das entsprechende Problem für endlich erzeugte Moduln über noetherschen K-Algebren erledigt?

Hinweis: Vergleiche den Algorithmus zur Bestimmung von Annullatoren von Moduln.

Abgabe: Donnerstag, 12.12.2002, in der Übung.