10. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Transzendenzgrad)
Zeige, dass $K[x,y,z]/(x^3+y^3+z^3)$ ein Integritätsbereich ist und bestimme den Transzendenzgrad des Quotientenkörpers für die Fälle $K=\mathbb{Q}$ und $K=\mathbb{C}$.
Was geschieht im Fall $K=\mathbb{F}_3$?

Aufgabe 2. (separable Algebren)
Sei K ein Körper und A eine separable, endliche K-Algebra (vgl. Definition 2.80).

a) Zeige, dass A als K-Algebra isomorph ist zu einer Teilalgebra von $K^{n\times n}$ mit $n:=\dim(A)$. Zeige weiter, dass das Radikal der Spur das Nilradikal enthält, mit Gleichheit, falls $\mathrm{char}(K)=0$.

b) Sei $A:=K[x,y,z]/(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$. Berechne die Darstellungen von A und bestimme die Dimension von A sowie die Dimension des Radikals.

c) Sei $A:=K[x,y,z]/(x^2+y^3-1, y^2+z^3-1, x+y+z)$. Berechne die Darstellungen von A und bestimme die Dimension von A sowie die Dimension des Radikals.

Hinweis zu b) und c): Verwende den Befehl `PolRepres` aus dem `Involutive`-Paket.

Aufgabe 3. (separable Erweiterungen)
Zeige, dass separable Körpererweiterungen Beispiele von separablen Algebren sind. Zeige weiter, dass jede separable Erweiterung von K direkte Summe separabler Körpererweiterungen ist.

Aufgabe 4. (graduiertes Hilbertpolynom)
Zeige, dass

$$\dim K[x_1\ldots,x_n]_{\leq d} = \dim K[x_1,\ldots,x_{n+1}]_d = \binom{d+n}{n},$$

also ein Polynom vom Grad n in d ist für $d\geq n$.

Abgabe: Donnerstag, 16.01.2003, in der Übung.