13. Übung zur Vorlesung Kommutative Algebra I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (injektive Moduln)
Sei A ein Hauptidealbereich. Zeige, dass $\mathrm{Quot}(A)$ und $\mathrm{Quot}(A)/A$ injektive A-Moduln sind.

Aufgabe 2. (Galois-Korrespondenz)
Bestimme $\lambda(\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle^k)$, also den Lösungsraum des homogenen Differentialgleichungssystems zum Ideal $I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle^k$, für $a \in K^n$ mit $\mathrm{char}(K) = 0$.

Aufgabe 3. (lineare Differentialgleichungssysteme)
Sei $I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ mit $\mathrm{char}(K) = 0$ und
$I_{k,a} := \langle\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle^k, I\rangle \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$.

a) Zeige: $I_{k,a} \neq K[x_1, \ldots, x_n] \;\Leftrightarrow\; a \in V(I)$.

b) Zeige: Im Falle $a \in V(I)$ ist $\dim K[x_1, \ldots, x_n]/I_{k,a}$ gleich der Anzahl linear unabhängiger Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$p(\partial)u = 0 \qquad (p \in I_{k,a}) \qquad\qquad (*)$$

der Form $qe^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$ mit $q \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathrm{Grad}(q) \leq k$.

c) Bestimme die Anzahl der linear unabhängigen Polynomlösungen bis zum Grad k des zu $I = \langle x^2 - y^3, x^2 - z^3\rangle$ gehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems.

d) Bestimme die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von $(*)$ für I aus c) und $a = (1, 1, 1)$.

Aufgabe 4. (inhomogene Differentialgleichungssysteme)

a) Untersuche die folgenden Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit rechten Seiten auf ihre Lösbarkeit:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = x, \frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 3y\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3}u - \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 1, \frac{\partial^2}{\partial z^2}u + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u = x^2z, \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = y^2\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}v = x^3y, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}v + \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}u = z^2\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3}u - \frac{\partial^2}{\partial y^3}v = x^2y^4, \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u + \frac{\partial^2}{\partial x^2}v = 3, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}v = xy^2\right\}.$$

b) Betrachte die inhomogenen Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\{\frac{\partial}{\partial x}u - \frac{\partial}{\partial y}v = a(x, y), \frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}v = b(x, y)\}.$$

Für welche a und b ist das Gleichungssystem lösbar?

Hinweise: vgl. Beispiel 3.35 .

Abgabe: Donnerstag, 06.02.2003, in der Übung.