

3. Übung zur Vorlesung Liegruppen I

Prof. Dr. Plesken

(WS 2002/03)

Aufgabe 1. (Killingform)

Sei \mathfrak{g} eine K -Liealgebra für einen Körper K mit Killingform κ .

- Zeige: 1) κ ist bilinear und symmetrisch.
2) κ ist assoziativ, d. h. $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$. für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$. (d.h. also auch, daß $\text{ad}(y)$ schief-symmetrisch bezüglich κ ist.)
3) Das Radikal von κ , also \mathfrak{g}^\perp , ist ein Ideal von \mathfrak{g} .
4) Ist \mathfrak{g} die Liealgebra einer linearen Liegruppe G , so ist die adjungierte Darstellung von G orthogonal bezüglich κ , d. h. Ad faktorisiert über $O(\mathfrak{g}, \kappa)$.
- Diskutiere die lineare Liegruppe $SL_2(\mathbb{R})$ sowie ihre Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ im Sinne von Teil (a).

Aufgabe 2. (Komplexifizierung)

Zeige mit Hilfe von Beispiel 1.25 die Isomorphie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3. (Komponente der 1)

Zeige:

- $O_n(\mathbb{R})^\circ = SO_n(\mathbb{R})$;
- $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})^\circ \cong C_2$;
- $GL_n(\mathbb{C})^\circ = GL_n(\mathbb{C})$;
- $SL_n(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 4. Darstellung linearer Liegruppen

Sei $D : G \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ eine Darstellung mit zugehörigem Darstellungsmodul $V = \mathbb{R}^n$.

- Zeige: D ist genau dann äquivalent zu einer Darstellung D' , die über $O_n(\mathbb{R})$ faktorisiert, wenn auf V ein positiv definites, G -invariantes Skalarprodukt existiert.
- Zeige: Ist in der Situation von Teil (a) U ein \mathbb{R} - G -Teilmodul von V , so auch der Orthogonalraum U^\perp und es gilt $V = U \oplus U^\perp$ als \mathbb{R} - G -Moduln.
- In der Situation von (a), folgere aus (b):
Es gibt eine Zerlegung $\text{id}_V = \pi_1 + \dots + \pi_k$, so dass $\pi_i \in \text{End}_G(V)$, $\pi_i \circ \pi_j = \delta_{ij} \pi_j$ und $\pi_i(V)$ ein einfacher \mathbb{R} - G -Modul ist für alle $i = 1, \dots, k$.

Was ist das Analogon zu (a), (b) und (c) für komplexe Darstellungen?

Abgabe: Donnerstag, 07.11.2002, in der Übung.