5. Übung zur Vorlesung Liegruppen I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Tensorprodukt von Darstellungen)
Sei G eine Gruppe, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit K-G-Moduln M und N sowie Darstellungen D_M und D_N von G auf M bzw. N bzgl. geeigneter K-Basen.

a) Zeige: Das Tensorprodukt $M \otimes N = M \otimes_K N$ ist ebenfalls ein K-G-Modul durch $g(m \otimes n) := (gm) \otimes gn$ für alle $g \in G$, $m \in M$, $n \in N$. Zeige weiter: Bei geeigneter Basiswahl von $M \otimes N$ ist $D_{M\otimes N}(g) = D_M(g) \otimes D_N(g)$ (Kroneckerprodukt von Matrizen) für alle $g \in G$.

b) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Zeige: Durch $x(m \otimes n) := (xm) \otimes n + m \otimes (xn)$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$, $n \in N$ wird das Tensorprodukt $M \otimes_K N$ zu einem Darstellungsmodul von $\mathfrak{g}$. (Sind d_M und d_N die zu M und N gehörigen Darstellungen von $\mathfrak{g}$, so bezeichnet man $d_{M\otimes N}$ auch mit $d_M \otimes d_N$, obwohl $(d_M \otimes d_N)(x) = d_M(x) \otimes I + I \otimes d_N(x)$ bei geeigneter Basiswahl gilt.)

c) Sei G eine lineare Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Zeige: Die Darstellung $D_M \otimes D_N$ auf $M \otimes N$ von G liefert eine Darstellung $d_M \otimes d_N$ von $\mathfrak{g}$ auf $M \otimes N$.

d) Wie macht man $\bigwedge^k M$ und $\bigwedge^k M^*$ zu G- respektive $\mathfrak{g}$-Moduln? (Beweis)

Aufgabe 2. (Charaktere von Darstellungen)
Sei $D : G \to GL_n(K)$ eine Darstellung der Gruppe G und definiere den Charakter der Darstellung durch $\chi_D(g) := \mathrm{Spur}(D(g))$ für $g \in G$. (Falls D eine Darstellung zum K-G-Modul M ist, so schreibt man auch χ_M statt χ_D.) Zeige:

a) χ_D ist konstant auf den Konjugiertenklassen von G,
$D \sim D' \Rightarrow \chi_D = \chi_{D'}$ und χ_M ist wohldefiniert.

b) $\chi_{M\oplus N}(g) = \chi_M(g) + \chi_N(g)$

c) $\chi_{M\otimes N}(g) = \chi_M(g) \cdot \chi_N(g)$

d) $\chi_{\bigwedge^2 M}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_M(g)^2 - \chi_M(g^2)\right)$ (Hinweis: Betrachte die Eigenwerte)

Aufgabe 3. (Spiegelung am Kreis)
Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M mit zwei Koordinatensystemen x und $\hat{x}$ sowie der Koordinatenumrechnung

$$\hat{x}^{-1} \circ x \,:\, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,:\, (\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Konstruiere eine Mannigfaltigkeit als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ zur angegebenen Koordinatenumrechnung und gib x sowie $\hat{x}$ explizit an.

Aufgabe 4. (Produkt von Mannigfaltigkeiten)
Konstruiere das cartesische Produkt $X \times Y$ zweier glatter Mannigfaltigkeiten X^m und Y^m als glatte $(n + m)$-dimensionale Mannigfaktigkeit, indem man einen Atlas angebe, der sich aus Paaren der Karten von X und Y zusammensetzt.

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2002, in der Übung.