8. Übung zur Vorlesung Liegruppen I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Adjungierte Darstellung)
Zeige direkt, daß Ad eine n-dimensionale Darstellung der n-dimensionalen Liegruppe G auf $T_1 G$ ist.

Aufgabe 2. (Adjungierte Darstellung linearer Gruppen)
Zeige: Ist G eine Lieuntergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, also eine lineare Liegruppe, und identifiziert man die Liealgebra von G im Sinne der Definition $\mathrm{Ad}(g) := \mathrm{Inn}(g)_{*|1} = (L_g \circ R_{g^{-1}})_{*|1}$ mit einem Teilraum $T_{I_n} G$ von $\mathbb{R}^{n \times n} \equiv T_{I_n} GL_n(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1} \text{ für alle } g \in G, X \in T_1 G.$$

Aufgabe 3. (Tangentialbündel)
Zeige: $T(SO_3(\mathbb{R}))$ ist isomorph zur Liegruppe der orientierungserhaltenden Euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$. Sind $T(O_3(\mathbb{R}))$ und die Gruppe aller Euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ auch isomorph?

Aufgabe 4. (partielle Ordnung)
Die Liegruppe G operiere auf der Mannigfaltigkeit M. Auf der Menge der Bahnen von G auf M ist durch

$$B \leq B' \Leftrightarrow B \subseteq \overline{B'}$$

eine partielle Ordnung definiert. Diskutiere diese Ordnung für die Konjugationsoperation von $GL_n(\mathbb{C})$ auf $C^{n \times n}$ und schreibe die Ordnung der Bahnen für $n = 3$ auf. Was geschieht, wenn G kompakt ist?

Abgabe: Donnerstag, 12.12.2002, in der Übung.