9. Übung zur Vorlesung Liegruppen I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (1. Satz von Lie)
Sei G eine Liegruppe mit Produktfunktion $\mu : G \times G \to G$. Dann gilt:

$$\mu_{*(g,h)}|_{0\times T_h G} = \mu_{*(gh,1)}|_{0\times T_1 G} \circ (\mu_{*(h,1)}|_{0\times T_1 G})^{-1}$$

für alle $g, h \in G$.
Hinweis: Benutze $\iota_g : G \to G \times G : \ h \mapsto (g,h)$ für alle $g \in G$ und $\mu \circ \iota_g = L_g$.

Aufgabe 2. (Vektorfelder und ODEs)
Sei M eine Mannigfaltigkeit und $v \in (TM)_s$ ein lokaler Schnitt.

a) Zeige: Durch v gegeben als $v = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (beachte die Summationskonvention!) wird ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem definiert mit $\dot{x}_i = a_i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, so dass für dessen Lösungen φ gilt $\dot{\varphi}(t) = v_{\varphi(t)}$. (Notation: $\dot{\varphi}(t) := \varphi_{*|t}(\frac{\partial}{\partial t})$)

b) Sei nun $M = \mathbb{R}^3$ und $v = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$. Stelle das Differentialgleichungssystem auf, bestimme die Lösungen und interpretiere sie geometrisch.
Gib eine Operation $\omega : \mathbb{R} \times M \to M$ von $\mathbb{R}$ auf M an, so dass $\omega_{*(1,m)} = v_{|m}$ ist.

Aufgabe 3. (gefaserte Mannigfaltigkeiten)
Zeige:

a) Das Paar von Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, S^1)$ mit $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1 : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ (oder kurz: $\pi : R^2 \setminus \{0\} \to S^1$) ist eine gefaserte Mannigfaltigkeit.

b) $\pi' : \mathbb{R} \times S^1 \to S^1 : (x, y) \mapsto x$ ist ebenfalls eine gefaserte Mannigfaltigkeit.

c) π und π' sind isomorph als gefaserte Mannigfaltigkeiten. Sind diese auch isomorph zu $\pi'' : TS^1 \to S^1$?

Aufgabe 4. (Bahnen, Faserungen und Invarianten)
Betrachte die gefaserte Mannigfaltigkeit $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ (Beispiel 3.6). Zeige, dass die Fasern gerade die Bahnen von $O_{2,1}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind.

Abgabe: Donnerstag, 19.12.2002, in der Übung.