12. Übung zur Vorlesung Liegruppen I

Prof. Dr. Plesken **(WS 2002/03)**

Aufgabe 1. (Maurer-Cartan-Form)

a) Zeige, dass die Maurer-Cartan-Form von $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$ gegeben ist durch die Matrix $(dx^i_j) : T\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to (A, X) \mapsto X$ der reellwertigen Differentialformen $dx^i_j : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (A, (z^k_l)) \mapsto z^i_j$.

b) Drücke die Maurer-Cartan-Form von $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ mit Hilfe der Maurer-Cartan-Form von $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$ aus.

Aufgabe 2. (symmetrische und alternierende k-Formen)
Beschreibe explizit die zu S^kT^*X und Λ^kT^*X mit $\dim X = n$ gehörigen Matrixdarstellungen von $GL_n(\mathbb{R})$ für $k = 1, 2$ und $n = 2$.
Was geschieht für allgemeine k und n ?

Aufgabe 3. (kanonische Isomorphie)
Seien V, W K-Vektorräume. Zeige, dass $\mathrm{Hom}(V, W)$ und $V^*\otimes W$ kanonisch isomorph sind, d.h. gib einen basisunabhängigen Isomorphismus an.

Aufgabe 4. (Liealgebra zur Liegruppe)
Berechne das Inverse von $\mathcal{L}(GL_n(\mathbb{R})) \to T_{I_n}GL_n(\mathbb{R}) : v \mapsto v_{I_n}$ explizit und vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 1.
Hinweis: Benutzte das Koordinatensystem x^i_j und entwickle das Vektorfeld entsprechend nach $\frac{\partial}{\partial x^i_j}$.

Abgabe: Donnerstag, 30.01.2003, in der Übung.