9. Übung zur Computeralgebra II

Prof. Dr. Plesken **(WS 2005/06)**

Aufgabe 1. (Lokalisierung)
Zeige: Der Gruppenring von $(\mathbb{Z}^n, +)$ ist ein Bruchring $R = S^{-1}K[x_1, \ldots, x_n]$ für eine geeignete Menge S.

Aufgabe 2. (Krull-Dimension)
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die *Krull-Dimension* $\dim R$ von R ist definiert als das Supremum der Längen r aller echt absteigenden Ketten von Primidealen $P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \ldots \supsetneq P_r$ von R.

a) Bestimme $\dim \mathbb{Z}$.

b) Bestimme $\dim K[x_1, \ldots, x_n]$ für einen Körper K.

c) Man gebe eine geometrische Interpretation von $\dim \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ für $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Hinweis zu b): Der Transzendenzgrad einer K-Algebra I, die auch Integritätsbereich ist, sei definiert als der Transzendenzgrad der Körpererweiterung $\mathrm{Quot}(I)/K$.

Seien $P, Q \trianglelefteq R := K[x_1, \ldots, x_n]$ Primideale mit $P \subsetneq Q$. Man zeige, dass der Transzendenzgrad von R/Q echt kleiner als der Transzendenzgrad von R/P ist. Dazu lokalisiere man mit geeigneter multiplikativ abgeschlossener Menge S mit $P \cap S = \emptyset$ und $Q \cap S = \emptyset$.

Aufgabe 3. (Primideale)
Es sei $R := \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ und $I \trianglelefteq R$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} R/I < \infty$. Man implementiere einen Algorithmus in Maple, der alle Primideale $P \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq P$ bestimmt. Wie kann man die Ideale $I \trianglelefteq R$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} R/I < \infty$ charakterisieren, welche sich als Durchschnitte von Primidealen schreiben lassen?

Abgabe: Mittwoch, 11.01.2006, in der Übung.

Der Lehrstuhl B wünscht Euch Frohe Weihnachten und ein gutes, gesundes und erfolgreiches neues Jahr!