12. Übung zur Computeralgebra II

Prof. Dr. Plesken **(WS 2005/06)**

Definition (Projektiver Raum). Es sei K ein Körper und $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum. Die multiplikative Gruppe K^* von K operiert auf $V - \{0\}$ durch Multiplikation. Der *projektive Raum* $\mathcal{P}(V)$ *auf* V ist die Menge $(V - \{0\})/K^*$ der Bahnen. Für $0 \neq v \in V$ bezeichne $[v] \in \mathcal{P}(V)$ die Bahn von v.

Die Punkte von $\mathcal{P}(n, K) := \mathcal{P}(K^{(n+1)\times 1})$ werden mit

$$(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) := [\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}]$$

bezeichnet (homogene Koordinaten).

Aufgabe 1. (Projektive Geometrie)
Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $i = 0, \ldots, n$ sei $S_i := \{(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) \in \mathcal{P}(n, K) \mid a_i \neq 0\}$. Zeige:

a) Es gibt eine Bijektion zwischen K^n und S_i.

b) Das Komplement $\mathcal{P}(n, K) - S_i$ kann mit $\mathcal{P}(n-1, K)$ identifiziert werden.

c) $\mathcal{P}(n, K) = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$.

d) Für $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad d sei

$$f^{(h)} := x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

die Homogenisierung von f. Erkläre mit Hilfe der Homogenisierung, wie man aus affinen Varietäten $V \subseteq K^n$ projektive Varietäten $W \subseteq \mathcal{P}(n, K)$ erhält und wie man von W auf V zurückschließen kann.

e) Man betrachte die projektive Varietät V zu $\{x_1^2 - x_1, x_2^3 - x_2\} \subset \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ und erkläre die Schnitte $V \cap S_i$ für $i = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2. (Differentialkörper)

a) Zeige: Für Derivationen δ auf R gilt:

$$\delta(1) = 0, \qquad \delta(0) = 0, \qquad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$$

für alle $a, b \in R$ mit $\frac{a}{b} \in R$.

b) Für welche $f \in K[x]$ ist das Initial von f gleich der Separante von f?

Aufgabe 3. (Pseudodivision)
Man implementiere eine Pseudodivision für Polynome in Maple (ohne (`s`)`prem` zu benutzen) und verwende sie, um die gemeinsamen Nullstellen des algebraischen Gleichungssystems $x^3 - 1 = 0$, $x^2y - xy^2 - y = 0$ zu finden.

Abgabe: Mittwoch, 01.02.2006, in der Übung.