

# 1 Kategorien und Funktoren

**Definition 1.1.** Eine **Kategorie** besteht aus einer Klasse von **Objekten** und Mengen von **Morphismen** zwischen den Objekten. Für die Menge der Morphismen zwischen den Objekten  $A$  und  $B$  schreiben wir  $\text{Hom}(A, B)$ . In den Kategorien, die wir betrachten, sind die Objekte stets Mengen und die Morphismen Abbildungen zwischen diesen Mengen. Eine Kategorie hat folgende Eigenschaften:

1.  $\text{Id}_A \in \text{Hom}(A, A)$
2. Ist  $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$  und  $\psi \in \text{Hom}(B, C)$ , so ist  $\varphi\psi \in \text{Hom}(A, C)$ \*
3. Für  $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$  ist  $\varphi\text{Id}_B = \text{Id}_A\varphi = \varphi$ .
4. Für Morphismen gilt das Assoziativgesetz.

Ist darüberhinaus  $\text{Hom}(A, B)$  eine abelsche Gruppe für alle  $A, B$  aus der Objektmenge der Kategorie und für jedes  $\psi \in \text{Hom}(B, C)$  die Abbildung  $\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(B, C): \varphi \mapsto \varphi\psi$  ein Gruppenhomomorphismus, so spricht man von einer **additiven Kategorie**. Eine additive Kategorie, in der ein Kern- und Kokernbegriff existieren, heißt auch **abelsche Kategorie**. Die Kategorien, die wir im Folgenden betrachten werden, sind alle abelsch.

**Definition 1.2.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktor**  $F$  von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  bildet jedes Objekt aus  $\mathcal{C}$  auf ein Objekt von  $\mathcal{D}$  ab und jeden Morphismus von  $A$  nach  $B$  mit  $A, B \in \mathcal{C}$  auf einen Morphismus von  $F(A)$  nach  $F(B)$ , so dass

$$F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi).$$

Ein **additiver Funktor** ist ein Funktor von additiven Kategorien, der die Gruppenstruktur der Morphismenmengen respektiert, das heißt

$$F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi) \quad \text{und} \quad F(-\varphi) = -F(\varphi).$$

**Beispiel 1.3.** Sei  $R$  ein Ring. Die Kategorie mit der Klasse der  $R$ -Linksmoduln als Objekten und  $R$ -Linksmodulhomomorphismen als Morphismen ist eine abelsche Kategorie, die mit  ${}_R\mathcal{M}$  bezeichnet wird. Dabei sei für einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $\varphi: A \rightarrow B$

$$\text{Kern } \varphi := \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Kokern } \varphi := B / \text{Bild } \varphi.$$

Für  $N \in \mathcal{M}_R$  (die Kategorie der  $R$ -Rechtsmoduln) ist  $N \otimes_R -$  ein Funktor der Kategorie  ${}_R\mathcal{M}$  nach  ${}_Z\mathcal{M}$  (die Kategorie der abelschen Gruppen) und der Lokalisierungsfunktor  $S^{-1}$  ein Funktor nach  ${}_{S^{-1}R}\mathcal{M}$ , wobei  $S \subseteq R$  eine multiplikativ abgeschlossene Menge ist.

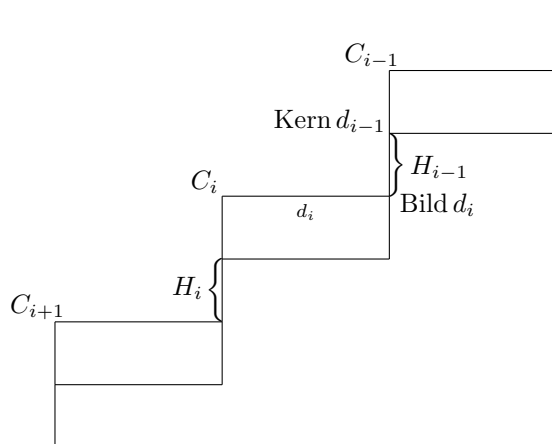
**Definition 1.4.** Eine **Sequenz** ist eine Folge von Morphismen, so dass die Komposition zweier aufeinanderfolgender immer Null ist. Also

$$\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} A_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

---

\*Die Anwendung von Abbildungen erfolgt hier immer von links nach rechts.

mit  $d_{i+1}d_i = 0$  oder anders gesagt  $\text{Bild } d_{i+1} \subseteq \text{Kern } d_i$ . Dieser Beobachtung gemäß definieren wir die **Homologiegruppen** der Sequenz durch  $H_i(A) := \text{Kern } d_i / \text{Bild } d_{i-1}$ . Sind alle Homologiegruppen einer Sequenz Null, so nennt man die Sequenz **exakt**.



Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

heißt **kurze exakte Sequenz**. Man beachte, dass  $\alpha$  hier injektiv ist,  $\beta$  surjektiv und  $C \cong \text{Kokern } \alpha$ .

**Definition 1.5.** Ein Funktor heißt **exakt**, falls er (kurze) exakte Sequenzen in (kurze) exakte Sequenzen überführt.

## 2 Derivierte Funktoren

**Definition 2.1.** Ein Modul  $F \in {}_R\mathcal{M}$  heißt **frei**, falls eine Indexmenge  $I$  und  $(b_i | i \in I)$  existieren, so dass  $F = \langle b_i | i \in I \rangle$  und für jeden Modul  $N$  mit einer Folge von Elementen  $n_i \in N, i \in I$  definiert  $b_i \mapsto n_i$  einen wohldefinierten Homomorphismus.

**Definition 2.2.** Seien  $M, N, P \in {}_R\mathcal{M}$ . Falls für jeden Homomorphismus von  $P$  nach  $M$  und für jedes exakte  $N \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$  ein  $\alpha$  existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\varphi} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutiert, heißt  $P$  **projektiv**.

**Bemerkung 2.3.** Seien  $M, L, L' \in {}_R\mathcal{M}$ . Durch

$$N \mapsto \text{Hom}(M, N) \quad \text{und}$$

$$\text{Hom}(L, L') \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, L), \text{Hom}(M, L')): \alpha \mapsto (\varphi \mapsto \varphi\alpha)$$

ist ein weiterer Funktor definiert, der (kovariante) **Hom-Funktor**, für den wir  $H^M$  oder  $\text{Hom}(M, -)$  schreiben. Dieser Funktor ist linksexakt, d.h. exakte Sequenzen der Form  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  werden in exakte Sequenzen überführt. Ist  $P$  projektiv, so ist  $\text{Hom}(P, -)$  sogar exakt, denn sei  $M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$  exakt, dann existiert wegen Projektivität von  $P$  für jeden Homomorphismus  $P \rightarrow M$  ein Urbild unter  $H^M(\varphi)$ , nämlich  $\alpha$  wie in obigem Diagramm. Die Umkehrung ist ebenfalls klar, so dass insgesamt

$$\text{Hom}(M, -) \text{ exakt} \Leftrightarrow M \text{ projektiv.}$$

**Definition 2.4.** Ein **Komplex** oder **Kettenkomplex** ist eine Sequenz der Form

$$\dots \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow 0.$$

**Definition 2.5.** Eine **projektive Auflösung** des Moduls  $M$  ist eine exakte Sequenz  $P$  mit  $P_i$  projektiv für  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , so dass der Komplex

$$\dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

exakt ist. Sind die  $P_i$  sogar frei, spricht man von einer **freien Auflösung**.

**Beispiel 2.6.** Sei  $R$  ein (kommutativer) Hauptidealbereich,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Es existiert offenbar ein endlich erzeugter freier Modul  $F$ , so dass

$$F \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$$

exakt ist. Damit ist

$$0 \rightarrow \text{Kern } \alpha \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von  $M$ .

Mit dem JANET-Algorithmus kann man freie Auflösungen für endlich erzeugte Moduln über Polynomringen ausrechnen. Geht man von einem Teilmodul  $M$  von  $K[x_1, \dots, x_n]^r$  aus, so kann man für  $F_0$  die Elemente einer JANETbasis als Symbole für die Erzeuger eines freien Moduls wählen und dann jeweils mit den Syzygien genauso verfahren, um eine endliche freie Auflösung zu erhalten.

**Satz 2.7.** Seien  $P, Q$  projektive Auflösungen der Moduln  $M$ , respektive  $N$  und sei  $\alpha: M \rightarrow N$  ein Modulhomomorphismus, dann existiert ein Morphismus von Kettenkomplexen zwischen

$$P \rightarrow M \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad Q \rightarrow N \rightarrow 0,$$

d.h. es existieren  $f_i: P_i \rightarrow Q_i$ , so dass

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \dots & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{d'_2} & Q_1 & \xrightarrow{d'_1} & Q_0 & \xrightarrow{d'_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ ist. Ein solches  $f$  heißt **Lifting** von  $\alpha$ .

*Beweis.* Man erhält  $f_0$  unmittelbar aus der Projektivität von  $P_0$ , denn  $d'_0$  ist ein Epimorphismus auf  $N$  und  $d_0\alpha$  ein Homomorphismus von  $P_0$  nach  $N$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & P_0 & & \\ & \swarrow f_0 & \downarrow d_0\alpha & & \\ Q_0 & \xrightarrow{d'_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es ist  $\text{Bild } d_1 f_0 \subseteq \text{Bild } d'_1$ , denn

$$f_0 d'_0 = d_0 \alpha \Rightarrow d_1 f_0 d'_0 = \underbrace{d_1 d_0}_{=0} \alpha = 0 \Rightarrow \text{Bild } d_1 f_0 \subseteq \text{Kern } d'_0 = \text{Bild } d'_1$$

Somit erhalten wir  $f_1$  wie folgt

$$\begin{array}{ccccc} & & P_1 & & \\ & \swarrow f_1 & \downarrow d_1 f_0 & & \\ Q_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{Bild } d'_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und die weiteren  $f_i$  vollkommen analog. □

**Bemerkung 2.8.** Die Kettenkomplexe von  $R$ -Moduln bilden eine Kategorie (genauer die Objektklasse der Kategorie), die wir mit  ${}_R\mathcal{C}$  bezeichnen. Die Morphismen zwischen zwei Kettenkomplexen  $A$  und  $B$  seien dabei Folgen von  $R$ -Modulhomomorphismen  $f_i: A_i \rightarrow B_i$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{d_i} & A_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & B_i & \xrightarrow{d'_i} & B_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & \cdots \end{array}$$

(also etwa das Lifting eines Homomorphismus). In dieser Situation induziert wegen der Kommutativität  $f_i$  eine wohldefinierte Abbildung von  $H_i(A) \rightarrow H_i(B)$ , die mit  $(f_i)_*$  bezeichnet wird.

**Satz 2.9.** Sei  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz in  ${}_R\mathcal{C}$ , d.h. es liegt ein kommutatives Diagramm mit exakten Spalten wie folgt vor:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & C''_{i+1} & \xrightarrow{d''_{i+1}} & C''_i & \xrightarrow{d''_i} & C''_{i-1} & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$

Dann existiert ein verbindender Homomorphismus, mit dem man die lange exakte Sequenz

$$H_i(C') \longrightarrow H_i(C) \longrightarrow H_i(C'') \longrightarrow H_{i-1}(C') \longrightarrow H_{i-1}(C) \longrightarrow H_{i-1}(C'')$$

der Homologiegruppen erhält.

*Beweis.* Man sieht leicht ein, dass

$$0 \longrightarrow H_i(C) \longrightarrow C_i / \text{Bild } d_{i+1} \xrightarrow{d_i} \text{Kern } d_{i-1} \longrightarrow H_{i-1}(C) \longrightarrow 0.$$

exakt ist und somit hat das folgende kommutative Diagramm exakte Spalten, ferner sind die beiden mittleren Zeilen exakt.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & H_i(C') & \longrightarrow & H_i(C) & \longrightarrow & H_i(C'') \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & C'_i / \text{Bild } d'_{i+1} & \longrightarrow & C_i / \text{Bild } d_{i+1} & \longrightarrow & C''_i / \text{Bild } d''_{i+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & \text{Kern } d'_{i-1} & \longrightarrow & \text{Kern } d_{i-1} & \longrightarrow & \text{Kern } d''_{i-1} & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& H_{i-1}(C') & \longrightarrow & H_{i-1}(C) & \longrightarrow & H_{i-1}(C'') & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$

Das Schlangenlemma\* besagt, dass ein verbindender Homomorphismus zwischen der ersten und letzten Zeile existiert, so dass die Behauptung unmittelbar folgt.  $\square$

\*Für einen Beweis siehe <http://wwwb.math.rwth-aachen.de/veranstaltungen/SS07/DiffAlgII/Lambek.pdf>

**Definition 2.10.** Seien  $A, B$  Kettenkomplexe,  $f, g: A \rightarrow B$ . Eine **Homotopie** von  $f$  nach  $g$  ist eine Folge  $h_i$ , so dass für alle  $i$  gilt

$$f_i - g_i = h_i d'_{i+1} + d_i h_{i-1}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{d_i} & A_i \\
 \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} \\
 B_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & B_i & \xrightarrow{d'_i} & B_{i-1} \\
 \downarrow g_{i+1} & & \downarrow g_i & & \downarrow g_{i-1} \\
 & & & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow h_i \\
 \nwarrow h_{i-1}
 \end{array}$$

Schreibweise:  $f \simeq g$ . Wir bezeichnen zwei Kettenkomplexe  $A$  und  $B$  als **homotop**, falls  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow A$  existieren, so dass  $fg \simeq \text{Id}_A$  und  $gf \simeq \text{Id}_B$ .

**Lemma 2.11.** Ist  $f \simeq g$  für  $f, g: A \rightarrow B$ , so sind die auf den Homologiegruppen induzierten Abbildungen von  $f$  und  $g$  identisch, also  $(f_i)_* = (g_i)_*$ .

*Beweis.* Da man die Morphismen von Kettenkomplexen zueinander addieren kann, genügt zu zeigen, dass eine nullhomotope Abbildung auf den Homologiegruppen die Nullabbildung induziert, sei also  $f \simeq 0$ . Zu zeigen ist, dass  $f_i$  Kern  $d_i$  auf Bild  $d'_{i+1}$  abbildet. Sei also  $x \in A_i$  mit  $xd_i = 0$ , dann ist  $xf_i = \underbrace{xd_i}_{=0} h_{i-1} - \underbrace{xh_i d'_{i+1}}_{\in \text{Bild } d'_{i+1}}$ .  $\square$

**Lemma 2.12.** Zwei projektive Auflösungen eines Moduls sind homotop.

*Beweis.* Der Beweis funktioniert ähnlich wie der der Existenz eines Liftings. Eine mehr oder weniger ausgeführte Version findet sich im Vorlesungsskript zu Differentialalgebra II, Satz 2.76.  $\square$

**Folgerung 2.13.** Seien  $P \rightarrow M \rightarrow 0$  und  $Q \rightarrow M \rightarrow 0$  projektive Auflösungen von  $M$ , dann gilt  $H_i(P) \cong H_i(Q)$  für alle  $i$ .

**Definition 2.14.** Seien  $R, S$  Ringe,  $F: {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$  ein (kovarianter) Funktor. Der **n-te linksderivierte Funktor von  $F$** , Bezeichnung  $L_n F$ , ist definiert durch

$$L_n F(M) := H_n(F(P)), \quad M \in {}_R\mathcal{M},$$

wobei  $P \rightarrow M \rightarrow 0$  eine projektive Auflöserung von  $M$  ist,

$$L_n F(\alpha) := F(f_n)_*, \quad \alpha \in \text{Hom}(M, N)$$

wobei  $f$  ein Lifting von  $\alpha$  ist. Hierdurch ist ein additiver Funktor definiert.

Der linksderivierte Funktor kann als Maß für die Abweichung eines Funktors von der Exaktheit verstanden werden, für exakte Funktoren sind alle Linksderivierten bereits Null. Es ist zu beachten, dass die bei dem linksderivierten Funktor auftretenden Objekte nur bis auf  $S$ -Isomorphie bestimmt sind.

**Satz 2.15.** Sei  $F: {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$  ein additiver, kovarianter Funktor,

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in  ${}_R\mathcal{M}$ , dann gibt es für  $n > 0$  einen verbindenden Homomorphismus  $\delta_n: L_n F(M'') \rightarrow L_{n-1} F(M')$ , so dass

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow L_n F(M) \xrightarrow{\beta_*} L_n F(M'') \xrightarrow{\delta_n} L_{n-1} F(M) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow L_1 F(M'') \xrightarrow{\delta_1} L_0 F(M') \xrightarrow{\alpha_*} L_0 F(M) \xrightarrow{\beta_*} L_0 F(M'') \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

exakt ist.

*Beweis.* Differentialalgebra II, Satz 2.83. □

### 3 Der Koszul-Komplex

Im Folgenden bezeichne  $R$  immer einen kommutativen Ring.

**Definition 3.1.** Sei  $M \in {}_R\mathcal{M}$ , dann schreiben wir  $M^{\otimes n}$  für  $\underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_n$  und  $M^{\otimes 0} := R$ . Die Abbildung

$$M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \rightarrow M^{\otimes(m+n)}: (x, y) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$

ist  $R$ -multilinear und induziert somit eine Abbildung  $M^{\otimes m} \otimes M^{\otimes n} \rightarrow M^{\otimes(m+n)}$ . Diese Abbildungen können wir auf  $\bigotimes M := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M^{\otimes i}$  bilinear fortsetzen und machen  $\bigotimes M$  mit dieser Multiplikation zu einer assoziativen, graduierten  $R$ -Algebra, die **Tensoralgebra** von  $M$ . Diese hat folgende universelle Eigenschaft: Für jede assoziative  $R$ -Algebra  $A$  mit einem  $R$ -Modulhomomorphismus  $\varphi: M \rightarrow A$  existiert genau ein  $\varphi_*$ , das  $\varphi$  auf  $\bigotimes M$  fortsetzt, nämlich

$$\varphi_*: \bigotimes M \rightarrow A: m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \mapsto \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$$

Zudem faktorisiert jede  $R$ -multilineare Abbildung  $M^n \rightarrow N$  mit  $N \in {}_R\mathcal{M}$  über  $\bigotimes M$ .

**Definition 3.2.** Sei  $\Lambda M := (\bigotimes M) / Z$ , wobei  $Z := \langle m \otimes m \mid m \in M \rangle$ . Da  $Z$  von homogenen Elementen erzeugt ist, vererbt sich die Graduierung von  $\bigotimes M$  auf  $\Lambda M$  und wir schreiben  $\Lambda M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda^i M$ , wobei, falls  $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $\Lambda^i M$  erzeugt wird von den  $x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_i}$  mit  $j_1 < j_2 < \dots < j_i$ .  $\Lambda M$  heißt die **äußere Algebra** von  $M$ .

Wie bei der Tensoralgebra faktorisiert jede  $R$ -multilineare, alternierende Abbildung  $\Phi: M^n \rightarrow N$  über  $\Lambda M$ .

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\Phi} & N, \\ & \searrow \wedge & \nearrow \\ & & \Lambda M \end{array}$$

wobei man in dem Diagramm ebenso gut  $\Lambda^n M$  hätte schreiben können.

**Bemerkung 3.3.** Sei  $L$  ein  $R$ -Modul,  $f: L \rightarrow R$  eine Linearform. Die Abbildung

$$L^n \rightarrow \Lambda^{n-1}L: x \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n$$

für  $n \geq 2$  ist  $R$ -multilinear und alternierend, liefert also eine Abbildung  $d_f^{(n)}: \Lambda^n L \rightarrow \Lambda^{n-1}L$ . Setzt man außerdem  $d_f^{(1)} := f: \Lambda^1 L = L \rightarrow \Lambda^0 L = R$  und  $d_f^{(0)}: \Lambda^0 L = R \rightarrow \{0\}$ , so erhält man insgesamt eine Abbildung  $d_f: \Lambda L \rightarrow \Lambda L$ , die Elemente vom Grad  $n$  auf Elemente vom Grad  $n-1$  schickt. Weiter ist  $d_f$  eine Antiderivation und  $d_f^2 = 0$ .

**Definition 3.4.** Sei wieder  $f: L \rightarrow R$ . Die Sequenz  $K_\bullet(f)$

$$\cdots \xrightarrow{d_f} \Lambda^n L \xrightarrow{d_f} \Lambda^{n-1} L \xrightarrow{d_f} \cdots \xrightarrow{d_f} \Lambda^3 L \xrightarrow{d_f} \Lambda^2 L \xrightarrow{d_f} L \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0$$

heißt der **KOSZUL-KOMPLEX** von  $f$ .

Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, so ist  $K_\bullet(f, M) := K_\bullet(f) \otimes_R M$  der KOSZUL-Komplex mit Koeffizienten in  $M$ . Seien  $Z_\bullet(f) := \text{Kern } d_f$  und  $B_\bullet(f) := \text{Bild } d_f$ , dann nennt man den Modul  $H_\bullet(f) := Z_\bullet(f)/B_\bullet(f)$  die **KOSZUL-HOMOLOGIE** von  $f$ .

**Beispiel 3.5.** Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[x, y, z]$ ,  $L := R^{1 \times 3}$ ,  $f: L \rightarrow R$  gegeben

durch  $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ,  $p_i \in R$ . Der KOSZUL-Komplex von  $f$  ist dann gegeben durch

$$0 \longrightarrow \Lambda^3 L \xrightarrow{\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}} \Lambda^2 L \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}} L \xrightarrow{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}} R \longrightarrow 0$$

$\cong R \qquad \qquad \qquad \cong R^{1 \times 3}$

Man kann sagen, dass der Komplex mit den Syzygien gebildet ist, die man für jede Linearform hat. Wählt man für  $p_1, \dots, p_3$  Elemente, die nur diese trivialen

Syzygien haben, etwa  $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ist dementsprechend der KOSZUL-Komplex

sogar eine freie Auflöung. Im Allgemeinen ist der Komplex jedoch weit davon entfernt exakt zu sein.